Capítulo 1

Funciones hipergeométricas

1.1. Introducción

En el presente capítulo realizaremos una recopilación de los principales resultados relativos a las funciones hipergeométricas. Esta serie, estudiada por primera vez por Gauss en 1812, tiene la curiosidad histórica que en ella se realiza el primer modelo de una discusión de convergencia efectuada en palabras del propio Gauss "*con todo rigor, y hecha para satisfacer a aquellos cuyas preferencias se dirigen a los métodos rigurosos de los geómetras antiguos*"[1]. Actualmente resulta fundamental en el estudio y desarrollo de las distribuciones de probabilidad discretas, utilizándose, sobre todo, para expresar las funciones características y las generatrices, ya sean de probabilidad o de momentos.

Definición 1.1 *Sea r un número entero positivo y a un número real, se conoce como* **factorial polinómico** *de orden r y paso a con respecto a I, para lo cual escribiremos $I^{(r,a)}$, a la expresión siguiente:*

$$I^{(r,a)} = I \cdot (I + a) \cdot (I + 2a) \cdots (I + (r - 1)a)$$

[1] Elementos de historia de las matemáticas. Nicolás Bourbaki. Alianza Universidad. Madrid, 1992, p. 211.

(1) Si $a = -1$, $I^{(r,-1)} = I^{(r)} = I \cdot (I-1) \cdots (I-r+1)$, se llama r-ésimo **factorial descendente** de I.

(2) Si $a = +1$, $I^{(r,+1)} = (I)_r = I \cdot (I+1) \cdots (I+r-1)$; se conoce como r-ésimo **factorial ascendente** de I, y a $(I)_r$ se le da el nombre de **símbolo de Pochhammer**, en honor del matemático alemán L.A. Pochhammer(1841-1920).

(3) Para conseguir regularidad en la definición aceptaremos que $I^{(0,a)} = 1$.[2]

1.2. La función hipergeométrica de una variable

Definición 1.2 *Se define la* **función hipergeométrica de Gauss***,* **función hipergeométrica de primer género** *o simplemente* **función hipergeométrica***, a la serie siguiente:*

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i}{(c)_i} \cdot \frac{z^i}{i!} \tag{1.1}$$

con $z \in \mathbb{C}$*;* $a, b, c \in \mathbb{C}$*,* $c \neq 0, -1, -2, ...$

Notaciones alternativas han sido usadas por diversos autores. Entre ellas podemos citar a:

- Meijer(1941), $G^{12}_{22}\left(-z \begin{array}{cc} -a, & -b \\ -1, & -c \end{array} \right) = -\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)z} \cdot {}_2F_1(a,b;c;z)$

- Meijer(1953), $\Phi(a,b;c;z) = {}_2F_1(a,b;c;z)/\Gamma(c)$

[2]No todos los autores utilizan la misma notación. Hemos adoptado la de Janardan & Patil (1972), usada también por Johnson, Kotz & Kemp (1992). Diferente elección hacen Dyczka (1973, p.44) y Stuart & Ord (1987, p.81): $I^{[r]} = I \cdot (I-1) \cdots (I-r+1)$. Mood, Graybill & Boes (1974, p.529) proponen $(I)_r = I \cdot (I-1) \cdots (I-r+1)$, y por último Johnson, Kotz & Balakrishnan (1997, p.xix) definen $I^{[r]} = I \cdot (I+1) \cdots (I+r-1)$, aunque advierten en p.4 la falta de unicidad en la simbología utilizada.

- MacRobert(1947), $E(2; a, b; 1; c; -1/z) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \cdot {}_2F_1(a, b; c; z)$

- Appell(1926) y Bailey(1935), ${}_2F_1 \left[\begin{array}{cc} a, b; & \\ & z \\ c; & \end{array} \right] = {}_2F_1(a, b; c; z)$

- Riemann(1857), $P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & z \\ 1-c & b & c-a-b & \end{array} \right\} = {}_2F_1(a, b; c; z).$

Recibe su nombre por el hecho de que para ciertos valores de sus parámetros ($a = c, b = 1$, ó $b = c, a = 1$), se reduce a la serie geométrica elemental:

$${}_2F_1(a, 1; a; z) = +{}_2F_1(1, b; b; z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i$$

Teorema 1.1 *Si a, b ó ambos, son enteros no positivos, ya que $(I)_j$ es cero para $j > -I$ siendo I entero no positivo, la serie (1.1) tiene un número finito de términos, convirtiéndose en un polinomio de grado $-a, -b$ ó $min(-a, -b)$, respectivamente.*

Si la serie es infinita:

(1) Es absolutamente convergente si $|z| < 1$,

(2) Es divergente si $|z| > 1$, y

(3) Para $|z| = 1$, $z \neq 1$, es:

(a) Absolutamente convergente, si $Re(a + b - c) < 0$.

(b) Condicionalmente convergente, si $0 \leq Re(a + b - c) < 1$.

(c) Divergente, si $Re(a + b - c) > 1$.

(d) Divergente, si $Re(a + b - c) = 1$ y $Re(a + b) \leq Re(ab)$.

(e) Convergente, si $Re(a + b - c) = 1$ y $Re(a + b) > Re(ab)$.

(4) Para $z = 1$, es:

(a) Convergente, si $Re(a + b - c) < 0$.

(b) Divergente, si $Re(a + b - c) \geq 0$.

Demostración:

Si calculamos el cociente entre dos términos consecutivos resulta que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)} \cdot z$$

y si $n \to \infty$, la razón

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to |z|$$

Por tanto, según el criterio de D'Alembert, resulta que:

(1) Si $|z| < 1$, la serie es absolutamente convergente.

(2) Si $|z| > 1$, la serie es divergente.

(3) Si $|z| = 1$, $z \neq 1$,

La serie es absolutamente convergente para $Re(a+b-c) < 0$, convergente pero no absolutamente si $0 \leq Re(a + b - c) < 1$, y divergente si $1 < Re(a + b - c)$. Si $Re(a + b - c) = 1$, se tiene que:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \frac{Re(a + b - ab + 1)}{n^2} + o(1/n^3)$$

De lo que se deduce que la serie es convergente si $Re(a + b) > Re(ab)$, y divergente si $Re(a + b) \leq Re(ab)$.

(4) Si $z = 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + n(a + b) + ab}{n^2 + n(c + 1) + c}$$

y, aplicando el criterio de Raabe, se obtiene que:

(a) Si $Re(a+b-c) < 0$, la serie es convergente.

(b) Si $Re(a+b-c) > 0$, es divergente.

(c) Si $Re(a+b-c) = 0$ también es divergente, ya que en este caso:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1 - \frac{1}{n} - \frac{C}{n^2}$$

donde C es una constante.

$\square$

Teorema 1.2 *En $|z| < 1$, la función ${}_2F_1(a,b;c;z)$ es una solución de la ecuación diferencial:*

$$z(1-z)w'' + [c-(a+b+1)z]w' - abw = 0^3 \tag{1.2}$$

Demostración:

Llamemos

$$w = +{}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i} \cdot \frac{z^i}{i!}$$

En $|z| < 1$ la serie de potencias w es indefinidamente derivable, luego podemos hacer:

$$w' = \frac{dw}{dz} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i} \cdot i \cdot \frac{z^{i-1}}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i} \cdot \frac{z^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$w'' = \frac{d^2w}{dz^2} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i} \cdot (i-1) \cdot \frac{z^{i-2}}{(i-1)!} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i} \cdot \frac{z^{i-2}}{(i-2)!}$$

[3] La segunda solución de la ecuación diferencial (1.2), linealmente independiente de ${}_2F_1(a,b;c;z)$, se llama **función hipergeométrica de segundo género**, y es:
$\Phi(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(a-c+1)\cdot\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)\cdot\Gamma(1-c)} \cdot z^{1-c} \cdot {}_2F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; z)$.

Sustituyendo los valores de w, w' y w'' en el primer miembro de (1.2), resulta:

$$z(1-z)\cdot\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i}\cdot\frac{z^{i-2}}{(i-2)!}+$$
$$+[c-(a+b+1)z]\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i}\cdot\frac{z^{i-1}}{(i-1)!}+$$
$$-ab\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i}\cdot\frac{z^i}{i!}$$

Calculemos los coeficientes para cada potencia de z:

(i) z^0:

$$c\cdot\frac{ab}{c}-ab=0$$

(ii) z^1:

$$\frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2}+c\cdot\frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2}-(a+b+1)\cdot\frac{ab}{c}-ab\cdot\frac{ab}{c}=$$

$$=\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}+c\cdot\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}-ab\cdot\frac{(a+b+1+ab)}{c}=0$$

(iii) $z^i, i\geq 2$:

$$\frac{(a)_{i+1}(b)_{i+1}}{(c)_{i+1}(i-1)!}-\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i(i-2)!}+c\cdot\frac{(a)_{i+1}(b)_{i+1}}{(c)_{i+1}i!}+$$

$$-(a+b+1)\cdot\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i(i-1)!}-ab\cdot\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i i!}=$$

$$=\frac{(a+i)(a)_i(b+i)(b)_i}{(c+i)(c)_i(i-1)!}-\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i(i-2)!}+$$

$$+c\cdot\frac{(a+i)(a)_i(b+i)(b)_i}{(c+i)(c)_i i!}-(a+b+1)\cdot\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i(i-1)!}-ab\cdot\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i i!}=$$

$$= \frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i(i-2)!} \cdot \left[\frac{(a+i)(b+i)}{(c+i)(i-1)} - 1 + c \cdot \frac{(a+i)(b+i)}{(c+i)i(i-1)} - (a+b+1) \cdot \frac{1}{i-1} + \right.$$

$$\left. -ab \cdot \frac{1}{i(i-1)} \right] = 0, \text{ como se quería demostrar.}$$

□

Teorema 1.3 *La ecuación diferencial:*

$$z(1-z)w'' + [c - (a+b+1)z]w' - abw = 0$$

es equivalente a la ecuación diferencial:

$$[\Theta \cdot (\Theta + c - 1) - z \cdot (\Theta + a) \cdot (\Theta + b)] (w) = 0 \tag{1.3}$$

siendo $\Theta = z \cdot \dfrac{d}{dz}$.

Demostración:

$$[\Theta \cdot (\Theta + c - 1) - z \cdot (\Theta + a) \cdot (\Theta + b)] (w) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-z) \cdot \Theta^2(w) + [c - 1 - (a+b) \cdot z] \cdot \Theta(w) - a \cdot b \cdot z \cdot w = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-z) \cdot z \cdot (w' + z \cdot w'') + [c - 1 - (a+b) \cdot z] \cdot z \cdot w' - a \cdot b \cdot z \cdot w = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-z) \cdot z^2 \cdot w'' + [1 - z + c - 1 - (a+b) \cdot z] \cdot z \cdot w' - a \cdot b \cdot z \cdot w = 0 \Leftrightarrow$$

$$\{(1-z)\cdot z\cdot w''+[c-(a+b+1)\cdot z]\cdot w'-a\cdot b\cdot w\}\cdot z=0\Leftrightarrow$$

$$(1-z)\cdot z\cdot w''+[c-(a+b+1)\cdot z]\cdot w'-a\cdot b\cdot w=0$$

como se quería demostrar. □

Definición 1.3 (Prolongación analítica de la función hipergeométrica) *En el exterior del círculo de radio unidad, puede prolongarse analíticamente la función hipergeométrica mediante la transformación integral de Euler, de la forma siguiente:*

$$_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\cdot\int_0^1 t^{a-1}\cdot(1-t)^{c-a-1}\cdot(1-zt)^{-b}dt \qquad (1.4)$$

con $Re(c)>Re(a)>0$ *y* $|arg(1-z)|<\pi$ [4].

Ya que $_2F_1(a,b;c;z)=\,_2F_1(b,a;c;z)$, puede también definirse como:

$$_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\cdot\int_0^1 t^{b-1}\cdot(1-t)^{c-b-1}\cdot(1-zt)^{-a}dt \qquad (1.5)$$

con $Re(c)>Re(b)>0$ y $|arg(1-z)|<\pi$.

Ambas integrales definen funciones analíticas univaluadas en $|arg(1-z)|<\pi$; es decir, en todo $\mathbb{C}$ excepto en los puntos del intervalo $(1,+\infty)$. Ya que la función $_2F_1(a,b;c;z)$ está definida en $|z|<1$, utilizando (1.1) y (1.4) ó (1.5) obtenemos una prolongación analítica de la función hipergeométrica a $\mathbb{C}$, salvo el intervalo $[1,+\infty)$.

[4] La función **gamma**, $\Gamma(z)$, se define (Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger F. and Tricomi, F.G., 1953, p.1) como $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, con $Re(z)>0$

1.2.1. La función hipergeométrica generalizada de una variable

Definición 1.4 *Se conoce como* **función hipergeométrica generalizada***, a la serie siguiente:*

$$ {}_pF_q(a_1, a_2, ..., a_p; b_1, b_2, ..., b_q; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1)_i \cdots (a_p)_i}{(b_1)_i \cdots (b_q)_i} \cdot \frac{z^i}{i!} \tag{1.6} $$

con $z \in \mathbb{C}$*;* $a_j, b_k \in \mathbb{C}$*,* $b_k \neq 0, -1, -2, ...$*;* $j = 1, 2, ..., p$*;* $k = 1, 2, ..., q$

Teorema 1.4 *Si algún* a_j*, es entero no positivo, la serie (1.6) tiene un número finito de términos, convirtiéndose en un polinomio de grado* $\min\limits_{a_j \in \mathbf{Z}^- \cup \{0\}} \{-a_j\}$*.*

Si la serie es infinita:

(1) Si $p = q + 1$*,*

- *(a) Es absolutamente convergente si* $|z| < 1$
- *(b) Es divergente si* $|z| > 1$
- *(c) Para* $|z| = 1$*,* $z \neq 1$*, es:*
  - *(c1) Absolutamente convergente, si* $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) < 0$*.*
  - *(c2) Condicionalmente convergente, si* $0 \leq Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) < 1$*.*
  - *(c3) Divergente, si* $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) > 1$*.*
  - *(c4) Divergente, si* $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) = 1$ *y* $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right) \leq Re\left(\prod_{i=1}^{p} a_i\right)$*.*
  - *(c5) Convergente, si* $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) = 1$ *y* $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right) > Re\left(\prod_{i=1}^{p} a_i\right)$*.*

(d) Para $z = 1$*, es:*

(d1) Convergente, si Re $\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i \right) < 0.$

(d2) Divergente, si Re $\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i \right) \geq 0.$

(2) Si $p \leq q$*, es absolutamente convergente para todo valor de* z*.*

(3) Si $p > q + 1$*, es divergente para* $z \neq 0$*.*

Demostración:

Si calculamos el cociente entre dos términos consecutivos resulta que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(a_1 + n) \cdots (a_p + n)}{(b_1 + n) \cdots (b_q + n) \cdot (1 + n)} \cdot z$$

y si $n \to \infty$ tenemos que:

(1) Si $p = q + 1$ entonces, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \to |z|$

Por tanto, según el criterio de D'Alembert, resulta que:

(a) Si $|z| < 1$, la serie es absolutamente convergente.

(b) Si $|z| > 1$, la serie es divergente.

(c) Si $|z| = 1$, $z \neq 1$,

La serie es:

- absolutamente convergente para $Re \left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i \right) < 0$
- convergente pero no absolutamente si $0 \leq Re \left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i \right) < 1$

- divergente si $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) > 1$

- Si $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) = 1$, se tiene que:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i - \prod_{i=1}^{p} a_i + 1}{n^2} + o(1/n^3)$$

De lo que se deduce que la serie es convergente si $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right) > Re\left(\prod_{i=1}^{p} a_i\right)$, y divergente si $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right) \leq Re\left(\prod_{i=1}^{p} a_i\right)$.

(d) Si $z = 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + n^{p-1} \cdot \sum_{i=1}^{p} a_i + \cdots + \prod_{i=1}^{p} a_i}{n^{q+1} + n^q \cdot \left[\sum_{i=1}^{q} b_i + 1\right] + \cdots + \prod_{i=1}^{q} b_i}$$

y, aplicando el criterio de Raabe, se obtiene que:

(i) Si $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) < 0$, la serie es convergente.

(ii) Si $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) > 0$, es divergente.

(iii) Si $Re\left(\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i\right) = 0$ también es divergente, ya que en este caso:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1 - \frac{1}{n} - \frac{C}{n^2}$$

donde C es una constante.

(2) Si $p \leq q$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to 0$, resultando la serie absolutamente convergente para todo valor de z.

(3) Si $p > q+1$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \infty$, por lo que la serie es divergente para todo $z \neq 0$.

con lo que se concluye la demostración. $\square$

Teorema 1.5 *La función* ${}_pF_q(a_1, a_2, ..., a_p; b_1, b_2, ..., b_q; z)$ *es una solución de la ecuación diferencial:*

$$[\Theta \cdot (\Theta + b_1 - 1) \cdots (\Theta + b_q - 1) - z \cdot (\Theta + a_1) \cdots (\Theta + a_p)]\,(w) = 0 \qquad (1.7)$$

siendo $\Theta = z \cdot \frac{d}{dz}$.

Demostración:

Vamos a utilizar las siguientes propiedades tomadas de Luke(1969, p.24):

(1) $\prod_{j=1}^{p}(\Theta + a_j)z^i = z^i \cdot \prod_{j=1}^{p}(i + a_j)$

(2) $\Theta \cdot \prod_{k=1}^{q}(\Theta + b_k - 1)z^i = i \cdot z^i \cdot \prod_{k=1}^{q}(i + b_k - 1)$

(3) $[\Theta \cdot (\Theta + b_1 - 1) \cdots (\Theta + b_q - 1) - z \cdot (\Theta + a_1) \cdots (\Theta + a_p)]$
$({}_pF_q(a_1, a_2, ..., a_p; b_1, b_2, ..., b_q; z)) =$
$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1)_i \cdots (a_p)_i}{(b_1)_i \cdots (b_q)_i \cdot i!} \cdot \left[i(i + b_1 - 1) \cdots (i + b_q - 1) \cdot z^i - (i + a_1) \cdots (i + a_p) \cdot z^{i+1}\right]$

Calculemos los coeficientes para cada potencia de z:

(i) z^0:

$$\frac{(a_1)_0 \cdots (a_p)_0}{(b_1)_0 \cdots (b_q)_0 \cdot 0!} \cdot [0(0 + b_1 - 1) \cdots (0 + b_q - 1)] = 0$$

(ii) $z^i, i \geq 1$:

$$\frac{(a_1)_i \cdots (a_p)_i}{(b_1)_i \cdots (b_q)_i \cdot i!} \cdot [i(i+b_1-1)\cdots(i+b_q-1)] - \frac{(a_1)_{i-1} \cdots (a_p)_{i-1}}{(b_1)_{i-1} \cdots (b_q)_{i-1} \cdot (i-1)!} \cdot$$

$$\cdot [(i-1+a_1)\cdots(i-1+a_p)] = \frac{(a_1)_{i-1} \cdots (a_p)_{i-1}}{(b_1)_{i-1} \cdots (b_q)_{i-1} \cdot (i-1)!} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{(a_1+i-1)\cdots(a_p+i-1)}{(b_1+i-1)\cdots(b_q+i-1)} \cdot \frac{1}{i} \cdot i \cdot (i+b_1-1)\cdots(i+b_q-1) + \right.$$

$$\left. -(i-1+a_1)\cdots(i-1+a_p) \right] = 0$$

como se quería demostrar. $\square$

Bibliografía

[1] Appell, P. and Kampé de Fériet, J.(1926). *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques*, Paris: Gauthier-Villars.

[2] Bailey, W.N. (1935). *Generalized Hypergeometric Series*, London: Cambridge University Press.

[3] Dyczka, W. (1973). On the multidimensional Pólya distribution, *Annales Societatis Mathematicae Polonae, Series I*, **17**, 43-63.

[4] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger F. and Tricomi, F.G. (1953). *Higher Transcendental Functions*, **II**, New York: McGraw-Hill.

[5] Janardan, K.G. and Patil, G.P. (1972). A unified approach for a class of multivariate hypergeometric models, *Sankhya, Series A*, **34**, 363-376.

[6] Johnson, N.L., Kotz, S. and Kemp, A.W. (1992). *Univariate Discrete Distributions*, second edition, New York: John Wiley & Sons.

[7] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions*, New York: Wiley.

[8] Luke, Y.L. (1969). *The Special Functions and their Approximations*, Volume 1, New York: Academic Press.

[9] MacRobert, T.M. (1947). *Functions of a Complex Variable. Third Edition*, London: McMillan.

[10] Meijer, C.S. (1941). Multiplikationstheoreme für die funktion $G_{p,q}^{m,n}(z)$, *Proc. Kon. Akad. V. Wetensch, Amsterdam*, **44**, 1062-1070.

[11] Meijer, C.S. (1953). Expansions Theorems for the G-function, *Proc. Kon. Akad. V. Wetensch, Amsterdam*, **55**, 349-357.

[12] Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics* (Third edition), New York: McGraw-Hill.

[13] Riemann, G.F.B. (1857). p-Funktionen, *Ges. Math. Werke, Gottingen (Republished Leipzig, 1892*, 67-84.

[14] Stuart, A. and Ord, J.K. (1987). *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, (Fifth edition), **1**, London: Griffin.