Capítulo 2

Los modelos de urnas

2.1. Introducción a los modelos de urnas

Los modelos de urnas son muy recurridos en probabilidad, entre otras razones, como recoge Berg (1989), por ser fácilmente visualizables, por su flexibilidad y por su adaptabilidad a un amplio rango de situaciones. De hecho, numerosos resultados de teoría de probabilidad para variables aleatorias discretas, pueden reducirse a un modelo de urnas.

Alfréd Rényi (1970) recuerda el caso de un colega suyo que estuvo enseñando Estadística en Etiopía, cuando los juegos de azar estaban prohibidos. La reducción a modelos de urnas le permitió sustituir estos juegos e introducir la teoría de probabilidad a sus alumnos.

Pólya (1954) hace la siguiente observación al respecto: "*Cualquier problema en probabilidad se puede hacer comparable a un problema acerca de bolsas que contengan bolas, y cualquier fenómeno aleatorio puede hacerse similar, en sus aspectos esenciales, a extracciones sucesivas de bolas de un sistema combinado de bolsas*".

2.2. Modelos de urnas

Un modelo de urnas se construye a partir de un conjunto de urnas que contengan bolas de diferentes colores. A continuación se establecen unas reglas que determinen el procedimiento a seguir según el color de la bola extraída en cada urna. Estas reglas hacen referencia al hecho de añadir o retirar bolas de urnas. Cuándo añadir o retirar, cuántas bolas y de qué urnas da origen a una gran variedad de modelos.

Dentro de los modelos de urnas tienen una importancia especial los llamados *Modelos por Contagio*, esto es, modelos donde la ocurrencia de un suceso tiene el efecto de cambiar la probabilidad de las posteriores ocurrencias de ese mismo suceso.

Eggenberger y Pólya (1923) utilizan la expresión *Chancevermehrung durch Erfolg*, para indicar el aumento de la probabilidad en un suceso debido a su ocurrencia anterior. Pólya sugiere el término *Contagio*, haciendo referencia a la similitud con las enfermedades contagiosas, donde cada ocurrencia incrementa la posibilidad de ocurrencias posteriores.

Feller (1968) generaliza este concepto y lo define *Efecto Secundario (aftereffect)*, proponiendo el siguiente paralelismo para describirlo: "*Consideremos una planta industrial expuesta a accidentes. Se puede pensar en la ocurrencia de un accidente como resultado de un juego de azar sobrehumano: el destino tiene almacenada una urna que contiene bolas negras (rojas en el texto original) y blancas: a intervalos de tiempo regulares, se extrae al azar una bola; si es negra, representa un accidente. Si la posibilidad de un accidente permanece constante en el tiempo, la composición de la urna es siempre la misma. Pero se piensa que cada accidente tiene un efecto secundario, con el cual se incrementa o decrece la probabilidad de nuevos accidentes*".

Los modelos que se utilizarán en lo sucesivo, parten del siguiente Modelo de Urna:

> " *Una urna contiene N bolas, a blancas y b negras; se extrae al azar una bola, se reemplaza y se añaden c bolas del mismo color y d bolas del color contrario. Se hace una nueva extracción aleatoria de la urna (que ahora contiene $a+b+c+d$ bolas) y se repite el procedimiento sucesivamente*".

Se utilizan, de esta manera, cuatro parámetros para describir el modelo: a, b, c y d. El número de bolas que la urna contiene inicialmente se deduce a partir de los dos primero: $N = a + b$.

El procedimiento que lleva al cese del experimento puede proporcionar un nuevo parámetro, cuando se establece un número de repeticiones n. En cualquier caso debe entenderse que se trata de una regla más del modelo, la que establece el final del proceso, y también sirve para diferenciar los modelos de urnas entre sí.

Cuando se establece que el número de repeticiones del experimento será una cantidad n, el modelo se denomina *Modelo de Urna de Bernard Friedman*, en honor a quien lo propuso en 1949, y se trata de un modelo general a partir del cual son desarrollados modelos posteriores.

Este valor n determina, evidentemente, un número máximo de repeticiones. El experimento puede pararse antes de llegar a esta cantidad si la composición de la urna va a proporcionar un experimento determinista.

Se tiene así un primer modelo que viene definido por cinco parámetros, y que en general se va a notar en lo sucesivo:

$$(a, b, c, d, n)$$

A este modelo nos referiremos como *Modelo Directo*.

Otro procedimiento de parada, alternativo al de imponer un número de repeticiones del experimento, consiste en parar el experimento después de haber obtenido un número, k, de bolas de un determinado color. En este caso, el modelo que se plantea también tiene cinco parámetros:

$$[a, b, c, d, k],$$

que se va a denominar en lo sucesivo *Modelo Inverso*, para distinguirlo del anterior.

2.3. El Modelo de Urna de Pólya

Se va a definir el Modelo de Urna de Pólya en consonancia con el Modelo de Urna de Bernard Friedman ya definido y como una particularización de éste. Aunque, como se ha dicho, la idea de usar modelos de urnas se atribuye a Pólya, en su artículo inicial se utiliza un modelo más reducido, con un parámetro menos. En este sentido, la única restricción que se impone es considerar $d = 0$ en el modelo de Bernard Friedman.

La notación que se utilizará en este modelo, para mantener la relación con el anterior, será:

$$(a, b, c, 0, n).$$

La distribución a que conduce este modelo se conoce como *Distribución de Pólya*, y se estudiará en el capítulo *3*.

En relación con el denominado *Contagio* en la literatura original, Eggenberger y Pólya (1923) utilizan para distinguir casos derivados del modelo que proponen, el parámetro denominado *Factor de Contagio* γ, definido como:

$$\gamma = \frac{c}{N},$$

ya que es el parámetro c el que va a determinar las variaciones sucesivas en la composición de la urna.

Cabría hacer la indicación de que en el caso del Modelo de Urna de Bernard Friedman, el Contagio vendría determinado por los parámetros c y d. Este último no aparece en el Modelo de Pólya, y por esta razón se obvia en este estudio.

También es utilizado un parámetro p que describe la composición inicial de la urna, la proporción de bolas blancas que hay al principio del experimento:

$$p = \frac{a}{N}.$$

Si se plantea la misma restricción en el Modelo Inverso especificado anteriormente, se obtiene

$$[a, b, c, 0, k].$$

La distribución a que conduce este modelo se denomina *Distribución Inversa de Pólya*, ya que ha sido obtenida a partir del Modelo Inverso, o también *Distribución Negativa de Pólya*. En lo sucesivo se va a utilizar la primera de estas denominaciones: *Distribución Inversa de Pólya*, también comentada en el capítulo *3*.

2.4. Modelos derivados del Modelo de Pólya

En función de los parámetros antes mencionados, γ y p, Eggenberger y Pólya (1928) distinguen los siguientes casos del esquema de urna inicial:

(1) En función del parámetro p:

   (a) Sucesos usuales (*événements usuels*): En el caso en que p se mantiene constante cuando n tiende a infinito.

   (b) Sucesos raros (*événements rares*): Cuando p tiende a cero, pero de forma que el producto np tiende a una constante λ cuando n tiende a infinito

(2) En función del Factor de Contagio (parámetro γ):

(a) Sucesos Independientes (*événements indépendants*): Cuando $\gamma = 0$ (por tanto no hay factor de contagio)

(b) Contagio Débil (*faible contagion*): Cuando γ tiende a cero pero de forma que el producto $n\gamma$ tiende a una constante a cuando n tiende a infinito.

(c) Contagio Fuerte (*forte contagion*): Cuando γ es una constante estrictamente mayor que cero. En este caso $n\gamma$ tenderá a infinito con n.

Se distinguen dos modelos principales que se derivan del Modelo de Urna de Pólya, y que se obtienen por la simplificación de alguno de los parámetros (a, b, c, n), de la siguiente forma:

2.4.1. Modelo Con Reemplazamiento

Se trata del caso en el que el parámetro c toma el calor cero. Es decir, no hay Factor de Contagio ($\gamma = 0$) y cada bola extraída se devuelve a la urna junto con *ninguna otra bola del mismo color*. El esquema, siguiendo la notación usada es:

$$(a, b, 0, 0, n).$$

La composición de la urna no va a cambiar a lo largo de las n extracciones. El parámetro p va a permanecer, por tanto, constante durante el proceso, siendo su valor siempre:

$$p = \frac{a}{N}$$

La probabilidad de obtener una bola blanca no varía, proporcionando extracciones independientes.

En relación con la clasificación clásica, se trataría del caso de Sucesos Usuales por la constancia de p, y del caso de Sucesos Independientes, ya que el Factor de Contagio siempre es cero.

En general puede considerarse que cuando el parámetro c toma un valor mayor o igual que cero, siempre se añaden bolas a la urna, convirtiéndose en un Modelo Con Reemplazamiento.

En términos del Factor de Contagio, se diría que cuando su valor fuera mayor o igual que cero, se estaría tratando de un Modelo Con Reemplazamiento.

Si se estudia este modelo a partir del modelo Inverso, se llega a:

$$[a, b, 1, 0, k],$$

tratándose de un Modelo Con Reemplazamiento.

Algunos tipos especiales de Modelos Con Reemplazamiento, que se obtienen según el valor que toma el parámetro c, son los siguientes:

(1) $c = 1$:

En este caso el modelo obtenido tendrá la forma:

$$(a, b, 1, 0, n),$$

es decir, siempre que se extrae una bola se reemplaza junto con otra bola del mismo color. El Factor de Contagio valdrá:

$$\gamma = \frac{1}{N},$$

que es una cantidad positiva.

(2) $c = a = b$:

En este caso el modelo obtenido tendrá la forma:

$$(c, c, c, 0, n).$$

La urna constará inicialmente con el mismo número de bolas blancas y negras, c, (el número total de bolas será $N = 2c$), y en este caso la probabilidad de extraer una bola blanca coincide con el Factor de Contagio (también positivo):

$$p = \frac{1}{c} = \gamma$$

2.4.2. Modelo Sin Reemplazamiento

Se trata del caso en el que el parámetro c toma el valor -1, es decir, las bolas extraídas no son devueltas a la urna (o se devuelven a la urna junto con -1 bola del mismo color). El esquema, siguiendo la notación utilizada, sería el siguiente:

$$(a, b, -1, 0, n)$$

La composición de la urna va a cambiar durante el proceso, quedando cada vez menos bolas en su interior. El Factor de Contagio será, por tanto, negativo e igual a:

$$\gamma = \frac{-1}{N}$$

En general, piede considerarse que cuando el valor del parámetro c es estrictamente negativo, la urna va perdiendo bolas que no se reemplazan, originando un Modelo Sin Reemplazamiento.

En términos del Factor de Contagio, se diría que cuando su valor fuera menor que cero, se estaría tratando de un Modelo Sin Reemplazamiento.

Si se estudia a partir del modelo Inverso, se llega a:

$$[a, b, -1, 0, k],$$

tratándose también de un Modelo Sin Reemplazamiento.

2.5. Otros modelos de urnas relacionados. Aplicaciones

A partir del modelo de urna de Bernard Friedman expuesto al inicio de este capítulo, y siguiendo la notación utilizada hasta ahora, se han podido referir otros modelos de urna con distintas aplicaciones que se presentan a continuación.

2.5.1. Modelo de Campaña de Seguridad

Propuesto por el mismo Friedman como un caso particular de su modelo y relacionándolo con el ejemplo de los accidentes de Feller. El nombre se debe al planteamiento de que una campaña de seguridad es impulsada cuando ocurre un accidente (se extrae una bola negra); mientras que si no ocurre ningún accidente la campaña de seguridad afloja y la probabilidad de un accidente se incrementa.

En el modelo de urna de Friedman este hecho se traduce en que al obtener una bola (negra si hay un accidente o blanca si no lo hay), la probabilidad de que ocurra lo contrario aumenta (si ha ocurrido un accidente se impulsa la campaña de seguridad y cuando no ocurre se relaja), es decir, se incrementa el valor del parámetro d. La forma del modelo es la siguiente:

$$(a, b, 0, d, n),$$

con la restricción de que el parámetro d toma siempre valores estrictamente positivos.

Un caso particular de este modelo, cuando $d = 1$, ha sido estudiado por Freedman (1965). Este modelo:

$$(a, b, 0, 1, n),$$

tiene para él un tratamiento teórico ya que el objeto de su trabajo es estudiar el comportamiento del cociente $\dfrac{c-d}{c+d}$, que toma el valor -1 en este caso.

2.5.2. Modelo de Ehrenfest

También llamado Modelo de Intercambio de Calor entre dos cuerpos aislados, debido al origen del problema planteado por los físicos Ehrenfest y Ehrenfest (1907). Considera una urna con bolas blancas y negras. En cada extracción se reemplaza la bola obtenida por una bola del color opuesto. En este caso los parámetros del modelo general toman los valores:

$$(a, b, -1, 1, n)$$

2.5.3. Modelo de Naor

Se trata de un modelo que se construye a partir del Modelo Inverso. Naor (1956) planteó el siguiente modelo de urnas: Considera una urna con N bolas de las que una es negra (roja en el artículo original) ($b = 1$), y el resto blancas ($a = N - 1$). La sustitución de una bola blanca (cuando es extraída) por una bola negra continúa hasta que se extrae una bola negra. Naor estudia la variable, *número de extracciones requeridas*. Después de $N - 1$ extracciones la urna contiene sólamente bolas negras, no siendo necesarias más extracciones.

Consiste en un modelo donde se penaliza la extracción de una bola blanca (usualmente considerado éxito), y viene dado a partir del esquema:

$$[N - 1, 1, -1, 1, k]$$

2.6. Modelo de urnas generalizado

Bagchi y Pal (1985) presetan un modelo de urnas más general con una notación adaptada al desarrollo computacional de árboles. Gouet (1989) hace uso de este modelo y de la notación para sus estudios de convergencia.

Se considera una urna con la composición inicial utilizada hasta ahora de N bolas, M de las cuales son blancas. El experiemento consiste en extraer una bola y si resulta ser blanca, se devuelve a la urna junto con α bolas blancas y β bolas negras. Si la bola extraída resulta ser negra, se devuelve a la urna junto con γ bolas blancas y δ bolas negras. La variable aleatoria de interés es el número de bolas blancas que hay en la urna después de n extracciones.

La notación que se utiliza para representar el proceso es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Se hacen las siguientes suposiciones sobre los parámetros:

(1) $\alpha + \beta = \gamma + \delta = s \geq 1$

Es decir, se añade el mismo número de bolas en la urna en cada etapa. De esta forma, tras la n-ésima extracción en la urna habrá $N + ns$ bolas.

(2) $M \geq 1$

(3) $\alpha \neq \gamma$

(4) $\beta > 0$; $\gamma > 0$

(5) Si $\alpha < 0$, entonces α divide a γ y a M. Si $\delta < 0$, entonces δ divide a β y a $N - M$.

A partir de este modelo se obtienen otros casos particulares entre los que destacan:

(a) Cuando $\alpha = \delta = s \neq 0$ y $\beta = \gamma = 0$, se tiene el esquema de urna de Pólya. En este caso se verifica que el parámetro $c = s$. La notación es:

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

(b) Cuando $\alpha = \delta \neq 0$ y $\beta = \gamma = 0$, se tiene el esquema de urna de Friedman. Los parámetros correspondientes vendrían dados por $\alpha = \delta = c$ y $\beta = \gamma = d$. La notación correspondiente es:

$$A = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

(c) Cuando $\alpha = \delta = -1$ y $\beta = \gamma = 1$, se tiene el modelo de Ehrenfest.

(d) Cuando $\alpha = \gamma = 0$ y $\delta = -\beta > 0$, se tiene un modelo construido por Woodbury (1949), donde plantea que la extracción de una bola blanca (no infectada) no tiene efecto en la composición de la urna, pero que la extracción de una bola negra (infectada), provoca que δ bolas no infectadas se infecten. Es un caso en que el número de bolas de la urna permanece constante, y a largo plazo todas las bolas serán negras.

(e) Cuando $\alpha = \delta = -1$ y $\beta = \gamma = s$, se tiene un modelo contruido por Wei (1976) para determinar una asignación secuencial de tratamientos en una prueba clínica.

2.7. Un nuevo modelo de urnas

En forma de un nuevo modelo de urnas, Janardan y Schaeffer (1977) presentaron un esquema consistente en tres urnas, U_1, U_2 y U_3. La urna U_1 contiene a bolas blancas (verdes en el trabajo original), la urna U_3 contiene b bolas negras (rojas en el trabajo original), y la urna U_2 contiene a bolas blancas y b bolas negras. Se determinan dos enteros positivos N y t y un entero c de tal forma que verifiquen que

$$\min\{a, b\} + Nt + Nc \geq 0.$$

A continuación se elige un número entero k, $0 \leq k \leq N$. Se realiza una extracción de la urna U_2, después una extracción de la urna U_1 o de U_3, según el resultado de la extracción anterior, y por último N extracciones más de U_2 bajo las siguientes condiciones:

(1) Se extrae una bola de U_2, y se devuelve a la urna después de anotar su color.

(2) Se añaden kt bolas negras a U_1, $(N-k)t$ bolas blancas a U_3 y kt bolas blancas junto con $(N-k)t$ bolas negras a U_2.

(3) Si la bola que se extrajo de U_2 era negra, se extrae una de U_1. Si ésta también es negra, no se realizan más extracciones y no hay posibilidad de éxito.

(4) Si la bola que se extrajo de U_2 era blanca, se extrae una de U_3. Si ésta también es blanca, no se realizan más extracciones y no hay posibilidad de éxito.

(5) Si la bola que se extrajo de U_2 era negra y la que se extrajo de U_1 era blanca, o si la bola que se extrajo de U_2 era blanca y la que se extrajo de U_3 era negra, entonces se realizan N extracciones de U_2 con reemplazamiento, como se especifica en (6).

(6) Después de cada extracción de U_2 la bola extraída se reemplaza junto con c bolas más del mismo color. Antes de la siguiente extracción, las bolas de la urna U_2 se mezclan. Se considera éxito cuando exactamente k de estas N bolas son blancas.

En el caso particular en que $t = 0$, se tiene la misma situación que en el modelo de urna de Pólya.

2.8. Una extensión de los modelos de urnas

El modelo de urna de Bernard Friedman puede extenderse al caso de N bolas de $m+1$ colores distintos, de tal forma que hay M_i bolas del color i $(i = 1, 2, ..., m)$ y $N - \sum_{i=1}^{M} M_i$ bolas del $(m+1)$-ésimo color.

Si se extrae una bola del color i, esa bola junto con c más del mismo color y d bolas de cada uno de los m colores restantes se devuelven a la urna.

De esta manera se consigue un modelo más amplio que se va a notar con la siguiente estructura:

$$(N, M_1, M_2, ..., M_m, c, d, n),$$

cuando la condición de parada es realizar un total de n extracciones, es decir, en el caso del modelo directo.

Por otra parte, si se plantea el modelo inverso, es decir se establece como procedimiento de parada el obtener una configuración de colores determinada que esté formada por k_1 bolas del primer color, k_2 bolas del segundo, y así sucesivamente, se habría obtenido un modelo análogo al presentado como modelo inverso. La notación sería:

$$[M_1, M_2, ..., M_m, c, d, k_1, k_2, ..., k_m]$$

o, simplificada:

$$[N, M_1, M_2, ..., M_m, c, d, \mathbf{k}]$$

donde $\mathbf{k}$ representa el vector $(k_1, k_2, ..., k_m)$.

Estos modelos, si se considera el parámetro $d = 0$, proporcionan los Modelos de Urnas Multivariantes de Pólya Directo e Inverso, respectivamente, para los distintos valores del parámetro c. Este modelo, en esta versión multivariante, fue propuesto por Steyn (1951).

Los valores que tome el parámetro c, para $d = 0$, van a determinar si el modelo es con o sin reemplazamiento del mismo modo que se ha visto en apartado anteriores ($c \geq 0$ ó $c < 0$).

2.9. Esquema-resumen

El siguiente esquema-resumen presenta los modelos planteados. Los casos especiales darán lugar a distribuciones de probabilidad que se desarrollarán en el capítulo *3*.

(1) (a, b, c, d, n) : Modelo de Urna de Bernard Friedman

(a) Si $d = 0$:

$(a, b, c, 0, n)$: Modelo de Urna de Pólya

$(a, b, c \geq 0, 0, n)$: Modelo Con Reemplazamiento

$(a, b, 0, 0, n)$: Caso especial

$(a, b, 1, 0, n)$: Caso especial

$(a = c, b = c, c, 0, n)$: Caso especial

$(a, b, c < 0, 0, n)$: Modelo Sin Reemplazamiento

$(a, b, -1, 0, n)$: Caso especial

(b) Si $c = 0$:

$(a, b, 0, d, n)$: Modelo de Campaña de Seguridad

$(a, b, 0, 1, n)$: Modelo teórico de Freedman

(c) Si $c \neq 0$; $d \neq 0$:

$(a, b, -1, 1, n)$: Modelo de Ehrenfest

(2) $[a, b, c, d, k]$: Modelo Inverso

(a) Si $d = 0$:

$[a, b, c, 0, k]$: Modelo de Urna de Pólya Inverso

$[a, b, c \geq 0, 0, k]$: Modelo Con Reemplazamiento

$[a, b, 0, 0, k]$: Caso especial

$[a, b, c < 0, 0, k]$: Modelo Sin Reemplazamiento

$[a, b, -1, 0, k]$: Caso especial

(b) Si $c \neq 0$; $d \neq 0$:

$[N - 1, 1, -1, 1, k]$: Modelo de Naor

(3) $(M_1, M_2, ..., M_m, c, d, n)$: Modelo Discreto Multivariante

(a) Si $d = 0$:

$(M_1, M_2, ..., M_m, c \geq 0, 0, n)$: Modelo Con Reemplazamiento

$(M_1, M_2, ..., M_m, 0, 0, n)$: Caso especial

$(M_1, M_2, ..., M_m, 1, 0, n)$: Caso especial

$(M_1, M_2, ..., M_m, c < 0, 0, n)$: Modelo Sin Reemplazamiento

$(M_1, M_2, ..., M_m, -1, 0, n)$: Caso especial

(4) $[M_1, M_2, ..., M_m, c, d, k]$: Modelo Inverso Multivariante

(a) Si $d = 0$:

$[M_1, M_2, ..., M_m, c \geq 0, 0, k]$: Modelo Con Reemplazamiento

$[M_1, M_2, ..., M_m, 0, 0, k]$: Caso especial

$[M_1, M_2, ..., M_m, 1, 0, k]$: Caso especial

$[M_1, M_2, ..., M_m, c < 0, 0, k]$: Modelo Sin Reemplazamiento

$[M_1, M_2, ..., M_m, -1, 0, k]$: Caso especial

Bibliografía

[1] Bagchi, A. and Pal, A.K. (1985). Asymptotic normality in the generalized Pólya-Eggenberger urn model, with an application to computer data structures, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, **6**, (3), 394-405.

[2] Berg, S. (1988). Urn Models, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, **9**, Kotz, S., Johnson, N.L. and Read, C.B. (editors), 424-436. New York: Wiley.

[3] Eggenberger, F. and Pólya, G. (1923). Über die Statistik verketteter Vorgänge, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **3**, 279-289.

[4] Eggenberger, F. and Pólya, G. (1928). Calcul des probabilités sur l'interprétation de certaines courbes de frequence, *Comptes Rendus, Académie des Sciences, Paris*, **187**, 870-872.

[5] Ehrenfest, P. and Ehrenfest, T. (1907). Über zwei bekannte Eiwande gegen das Boltzmannshce H-Theorem, *Physikalische Zeitschrift*, **8**, 311-314.

[6] Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, **1** (Third edition), New York: Wiley.

[7] Freedman, D.A. (1965). Bernard Friedman's urn, *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 956-970.

[8] Friedman, B. (1949). A simple urn model, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **2**, 59-70.

[9] Gouet, R. (1989). A martingale approach to stong convergence in a generalized Pólya-Eggenberger urn model, *Statistics and Probability Letters*, **8**, 225-228.

[10] Heitele, D. (1975). *Educational Studies in Mathematics, Vol 6*. Dordrecht: Reidel.

[11] Janardan, K.G. and Schaeffer, D.J. (1977). A generalization of Markov-Pólya distribution its extensions and applications, *Biometrical Journal*, **19**, 87-106.

[12] Johnson, N.L. and Kotz, S. (1977). *Urn Models and Their Application*, New York: Wiley.

[13] Naor, P. (1956). On machine interference, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **18**, 280-287.

[14] Pólya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference*, Princeton: Princeton University Press.

[15] Renyi, A. (1970). *The Teaching of Probability and Statistics*, L. Rade, ed.

[16] Steyn, H.S. (1951). On discrete multivariate probability functions, *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A*, **54**, 23-30.

[17] Wei, Lee-Jen. (1976). *A class of designs for sequential clinical trials*, Department of Mathematics, University of South Carolina.

[18] Woodbury, M.A. (1949). On a probability distribution, *Annals of Mathematical Statistics*, **20**, 311-313.