Capítulo 4

Modificaciones sobre el Sistema de Pearson

4.1. Introducción

Pearson (1895) observó que para la distribución hipergeométrica se verificaba la siguiente ecuación en diferencias, lineal, de primer orden y homogénea:

$$\triangle p_{i-1} = \frac{a - i}{b_0 + b_1 i + b_2 i(i-1)} \cdot p_{i-1} \tag{4.1}$$

donde $p_i = p[X = i]$; X es la variable hipergeométrica; $\triangle p_{i-1} = p_i - p_{i-1}$; a, b_0, b_1 y b_2 son parámetros; y los valores de i para los que $p_i \neq 0$, son enteros no negativos consecutivos que diremos constituyen el conjunto soporte $T = \{m, m+1, m+2, ..., M\}, m \geq 0$.

Pearson no profundizó en el estudio de la ecuación (4.1), y parece que solo la usó para, mediante paso al límite, obtener la ecuación diferencial que define el **sistema de Pearson de distribuciones continuas**.

Carver (1919) sin embargo, sí que consiguió ciertos resultados para el suavizado de datos actuariales, y en 1923 obtuvo expresiones para los parámetros en función de los momentos, a partir de (4.1).

Un estudio del caso especial $b_0 = b_2 = 0$, $b_1 \neq 0$ ha sido realizado por Katz (1945, 1946, 1948, 1965).

Ord (1967a, 1967b, 1972) estudió distribuciones que verifican (4.1) y realizó una interesante clasificación de las mismas. Nosotros hemos elaborado la tabla *2.4* en la que se especifican los valores de los diferentes parámetros utilizados por Ord en su clasificación.

Bowman, Shenton y Kastenbaum (1991) generalizan la familia de Ord.

Herrerías (1976) amplió la ecuación (4.1) de la forma siguiente:

$$\triangle p_{i-1} = \frac{a_0 + a_1 i + a_2 i(i-1)}{b_0 + b_1 i + b_2 i(i-1) + b_3 i(i-1)(i-2)} \cdot p_{i-1} \tag{4.2}$$

Ollero y Ramos (1995) imponen ciertas condiciones a verificar por las distribuciones soluciones de (4.1) y caracterizan una subfamilia a la que pertenece la distribución de Pólya, y la hipergeométrica como caso particular suyo. Calculan la función generatriz de probabilidad de las distribuciones de dicha familia, y demuestran que pueden interpretarse como distribuciones binomiales generalizadas.

4.2. Familia de distribuciones de Katz

A la ecuación (4.1) Katz impuso las restriciones $b_0 = b_2 = 0$, $b_1 \neq 0$, obteniéndose:

$$\triangle p_{i-1} = \frac{a-i}{b_1 i} \cdot p_{i-1}, i = 1, 2, 3, ...$$

o bien:

$$p_i = \frac{a - i + b_1 i}{b_1 i} \cdot p_{i-1}$$

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = \frac{a - i + b_1 i}{b_1 i}$$

efectuando una traslación se tiene:

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{a-(i+1)+b_1(i+1)}{b_1(i+1)}, i = 0, 1, 2, ...$$

y si llamamos $\alpha = \dfrac{a+b_1-1}{b_1}$, $\beta = \dfrac{b_1-1}{b_1}$, podemos escribir:

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{\alpha+\beta i}{1+i}, i = 0, 1, 2, ... \tag{4.3}$$

A la familia de distribuciones generadas por (4.3) se le conoce con el nombre de **familia de distribuciones de Katz** o **K-familia**.

Debe observarse que:

(1) Si $i = 0$, entonces $\alpha = \dfrac{p_1}{p_0} > 0$, (ya que si $p_1 = 0$, se obtendría una distribución degenerada con $p_0 = 1$).

(2) Si notamos por μ_1' al momento ordinario o respecto al origen de orden 1, es decir a la esperanza de la distribución, podemos escribir la igualdad (4.3) como $(i+1)\cdot p_{i+1} = (\alpha+\beta i)\cdot p_i$. Si desarrollamos para los diferentes valores de i y sumamos miembro a miembro, se tiene que:

$$\mu_1' - \beta\cdot\mu_1' = \alpha \Rightarrow \mu_1' = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

y, como $\mu_1' > 0$, debe verificarse que $\beta < 1$.

(3) Si $\alpha+\beta n < 0$, debe entenderse que $p_{n+j} = 0$, para todo $j > 0$.

Teorema 4.1 *La f.g.p. de las distribuciones pertenecientes a la K-familia para las que $\beta \neq 0$ es:*

$$G(z) = \left(\frac{1-\beta z}{1-\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{{}_2F_1(\frac{\alpha}{\beta}, 1; 1; \beta z)}{{}_2F_1(\frac{\alpha}{\beta}, 1; 1; \beta)}$$

Demostración:

$$p_{i+1} = \frac{\alpha + \beta i}{1+i} \cdot p_i = \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta} + i}{1+i} \cdot p_i = \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta} + i}{1+i} \cdot \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta} + i - 1}{i} \cdot p_{i-1} =$$

$$= \cdots = \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta} + i}{1+i} \cdot \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta} + i - 1}{i} \cdots \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1} \cdot p_0 = \beta^{i+1} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i+1}}{(1+i)!} \cdot p_0$$

para $i = 0, 1, 2, ...$, y p_0 tal que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

Por tanto,

$$G(z) = p_0 \cdot {}_2F_1(\frac{\alpha}{\beta}, 1; 1; \beta z)$$

con $p_0 = \dfrac{1}{{}_2F_1(\frac{\alpha}{\beta}, 1; 1; \beta)}$, ya que $G(1) = 1$. □

Pertenecen a la K-familia las siguientes distribuciones:

1. Binomial, $p_i = \binom{n}{i}.p^i.q^{n-i}$, con $p + q = 1$, $p > 0, q > 0$, $i = 0, 1, 2, ..., n$:

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{p.(n-i)}{q.(i+1)} = \frac{\frac{np}{q} - \frac{p}{q} \cdot i}{i+1}, i = 0, 1, 2, ..., n$$

   Es decir $\alpha = \dfrac{np}{q}, \beta = -\dfrac{p}{q} < 0$, o de forma equivalente $n = -\dfrac{\alpha}{\beta}, p = \dfrac{\beta}{\beta - 1}$.

$$G(z) = (q + pz)^n$$

2. Poisson, $p_i = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^i}{i!}$, con $\lambda > 0$, $i = 0, 1, 2, ...$:

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{\lambda}{i+1}, i = 0, 1, 2, ...$$

   Es decir $\alpha = \lambda, \beta = 0$.

$$G(z) = \lim_{\beta \to 0} \left(\frac{1 - \beta z}{1 - \beta} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} = e^{\lambda(z-1)}$$

3. Binomial negativa, $p_i = \binom{k+i-1}{i} \cdot p^k \cdot q^i$, con $p+q=1, p>0, q>0, i=0,1,2,...$:

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{kq+qi}{i+1}, i = 0,1,2,...$$

Es decir $\alpha = kq$, $\beta = q$. Obsérvese que por ser p y q positivos y verificando que $p+q=1$, se concluye que $0 < \beta < 1$. De forma equivalente puede también escribirse que $k = \dfrac{\alpha}{\beta}, p = 1-\beta$.

$$G(z) = \left(\frac{1-qz}{p}\right)^{-k}$$

4.2.1. Modificaciones a la ley de recurrencia generatriz de la familia de Katz

Diversas modificaciones a la ley de recurrencia (4.3) que genera la K-familia, han sido realizadas por diferentes autores obteniéndose las siguientes familias:

(1) **EK-familia o Familia de Katz generalizada** (Gurland and Tripathi, 1975, 1977):

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{\alpha+\beta i}{\gamma+i}, i = 0,1,2,...$$

Teorema 4.2 *La f.g.p. de las distribuciones pertenecientes a la EK-familia para las que $\beta \neq 0$ es:*

$$G(z) = \frac{{}_2F_1(\frac{\alpha}{\beta},1;\gamma;\beta z)}{{}_2F_1(\frac{\alpha}{\beta},1;\gamma;\beta)}$$

Demostración:

$$p_{i+1} = \frac{\alpha+\beta i}{\gamma+i} \cdot p_i = \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta}+i}{\gamma+i} \cdot p_i = \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta}+i}{\gamma+i} \cdot \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta}+i-1}{\gamma+i-1} \cdot p_{i-1} =$$

$$= \cdots = \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta} + i}{\gamma + i} \cdot \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta} + i - 1}{\gamma + i - 1} \cdots \beta \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} \cdot p_0 = \beta^{i+1} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i+1}}{(\gamma)_{i+1}} \cdot p_0$$

para $i = 0, 1, 2, ...$, y p_0 tal que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

Por tanto,

$$G(z) = p_0 \cdot_2 F_1(\frac{\alpha}{\beta}, 1; \gamma; \beta z)$$

con $p_0 = \frac{1}{{}_2F_1(\frac{\alpha}{\beta}, 1; \gamma; \beta)}$, ya que $G(1) = 1$. □

(2) **CB-familia o Distribución hiper-Poisson** (Bardwell and Crow, 1964, 1965). Si $\beta \to 0$ en la EK-familia, se obtiene:

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{\alpha}{\gamma + i}, i = 0, 1, 2, ...$$

Teorema 4.3 *La f.g.p. de las distribuciones pertenecientes a la CB-familia es:*

$$G(z) = \frac{{}_1F_1(1; \gamma; \alpha z)}{{}_1F_1(1; \gamma; \alpha)}$$

Demostración:

$$p_{i+1} = \frac{\alpha}{\gamma + i} \cdot p_i = \frac{\alpha}{\gamma + i} \cdot \frac{\alpha}{\gamma + i - 1} \cdot p_{i-1} =$$

$$= \cdots = \frac{\alpha}{\gamma + i} \cdot \frac{\alpha}{\gamma + i - 1} \cdots \frac{\alpha}{\gamma} \cdot p_0 = \frac{\alpha^{i+1}}{(\gamma)_{i+1}} \cdot p_0$$

para $i = 0, 1, 2, ...$, y p_0 tal que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

Por tanto,

$$G(z) = p_0 \cdot {}_1F_1(1; \gamma; \alpha z)$$

con $p_0 = \dfrac{1}{{}_1F_1(1; \gamma; \alpha)}$, ya que $G(1) = 1$. $\square$

(3) **ECB-familia o CB-familia generalizada** (Gurland and Tripathi, 1975, 1977, 1979):

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{\alpha(\rho + i)}{(1+i)(\gamma + i)}, i = 0, 1, 2, ...$$

Teorema 4.4 *La f.g.p. de las distribuciones pertenecientes a la ECB-familia es:*

$$G(z) = \frac{{}_1F_1(\rho; \gamma; \alpha z)}{{}_1F_1(\rho; \gamma; \alpha)}$$

Demostración:

$$p_{i+1} = \frac{\alpha(\rho + i)}{(1+i)(\gamma + i)} \cdot p_i = \alpha \cdot \frac{\rho + i}{(1+i)(\gamma + i)} \cdot \alpha \cdot \frac{\rho + i - 1}{i(\gamma + i - 1)} \cdot p_{i-1} =$$

$$= \cdots = \alpha \cdot \frac{\rho + i}{(1+i)(\gamma + i)} \cdot \alpha \cdot \frac{\rho + i - 1}{i(\gamma + i - 1)} \cdots \alpha \cdot \frac{\rho}{\gamma} \cdot p_0 = \alpha^{i+1} \cdot \frac{(\rho)_{i+1}}{(i+1)!(\gamma)_{i+1}} \cdot p_0$$

para $i = 0, 1, 2, ...$, y p_0 tal que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

Por tanto,

$$G(z) = p_0 \cdot {}_1F_1(\rho; \gamma; \alpha z)$$

con $p_0 = \dfrac{1}{{}_1F_1(\rho;\gamma;\alpha)}$, ya que $G(1) = 1$. $\square$

(4) **Familia de Sundt-Jewell** (Sundt and Jewell, 1981 y Willmot, 1988):

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{a+b+ai}{1+i}, i = 1, 2, 3, ...$$

(coincide con la relación de recurrencia de la K-familia, excepto en que se excluye el caso $i = 0$)

Teorema 4.5 *La f.g.p. de las distribuciones pertenecientes a la familia de Sundt-Jewell para las que $a \neq 0$ y $a + b \neq 0$ es:*

$$G(z) = \frac{1}{(1-a)^{-\left(\frac{b}{a}+1\right)} - 1} \cdot \left[(1-az)^{-\left(\frac{b}{a}+1\right)} - 1\right]$$

Demostración:

$$p_{i+1} = \frac{a+b+ai}{1+i} \cdot p_i = \frac{a+b+ai}{1+i} \cdot \frac{a+b+a(i-1)}{i} p_{i-1} =$$

$$= \frac{a+b+ai}{1+i} \cdot \frac{b+ai}{i} \cdot ... \cdot \frac{b+2a}{2} \cdot p_1 =$$

$$= \frac{\frac{b}{a}+i+1}{1+i} \cdot \frac{\frac{b}{a}+i}{i} \cdot ... \cdot \frac{\frac{b}{a}+2}{2} \cdot a^i \cdot p_1 = \frac{\left(\frac{b}{a}+2\right)_i}{(i+1)!} \cdot a^i \cdot p_1$$

para $i = 1, 2, 3, ...$, y p_1 tal que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Podemos escribir p_{i+1} como

$$p_{i+1} = \frac{\left(\frac{b}{a}+2\right)_i}{(i+1)!} \cdot a^i \cdot p_1 = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a}+1\right)_{i+1}}{(i+1)!} \cdot a^{i+1} \cdot p_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{p_1}{a+b} \cdot {}_1F_0\left(\frac{b}{a}+1; -; az\right) - \frac{p_1}{a+b}$$

y como ${}_1F_0(a; -; z) = (1-z)^{-a}$ (Johnson, Kotz & Kemp, 1992, p.24),

$$G(z) = \frac{p_1}{a+b} \cdot \left[(1-az)^{-\left(\frac{b}{a}+1\right)} - 1\right]$$

Por último, ya que $G(1) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{p_1}{a+b} \cdot \left[(1-a)^{-\left(\frac{b}{a}+1\right)} - 1\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{(1-a)^{-\left(\frac{b}{a}+1\right)} - 1} \cdot \left[(1-az)^{-\left(\frac{b}{a}+1\right)} - 1\right]$$

$\square$

4.3. Familia de Ord

Ord estudia las distribuciones que son solución de (4.1), realizando una clasificación de ellas. Observa que la ecuación (4.1) es equivalente a

$$\triangle p_{i-1} = \frac{a-i}{(a+b_0) + i(b_1-1) + b_2 i(i-1)} \cdot p_i \tag{4.4}$$

y también a

$$p_i = \frac{b_2 i^2 + i(b_1 - b_2 - 1) + (a+b_0)}{b_2 i^2 + i(b_1 - b_2) + b_0} \cdot p_{i-1} \tag{4.5}$$

Las únicas restricciones que deben verificar los parámetros, a, b_0, b_1 y b_2, es que deben ser reales y satisfacer $\dfrac{b_2 i^2 + i(b_1 - b_2 - 1) + (a+b_0)}{b_2 i^2 + i(b_1 - b_2) + b_0} > 0$ para todo valor de

i perteneciente al conjunto soporte si éste es infinito y para $i = m+1, m+2, ..., M$ si es finito, ya que los valores p_i deben ser estrictamente positivos si $i \in T$.

Ord establece tres tipos principales entre las distribuciones soluciones de (4.1), (4.4) ó (4.5). Para ello, según sean las raíces del denominador de (4.1), considera:

(1) Tipo I: Una raiz cero ($b_0 = 0$, excepto $I(u)$), la otra distinta de cero y soporte finito (excepto $I(e)$)[1].

(2) Tipo VI: Una raiz cero ($b_0 = 0$), la otra negativa ($1 - \frac{b_1}{b_2} < 0$) y soporte infinito.

(3) Tipo IV: Raíces imaginarias ($(b_1 - b_2)^2 - 4b_0b_2 < 0$).

Para distinguir a las diferentes distribuciones propone como criterio:

$$\kappa = \frac{(b_1 - b_2 - 1)^2}{4b_2(a + b_0)}$$

procedente del análisis de la naturaleza de las raíces del denominador de (4.4) ó del numerador de (4.5), que se prefiere a $\frac{(b_1 - b_2)^2}{4b_2b_0}$ (del denominador de (4.1)) ya que en los tipos $I(a)$, $I(b)$, $I(e)$ y VI se tiene que $b_0 = 0$.

A continuación del tipo I se deduce el II; del IV, el V y el VII; y como diferentes casos límite (con $b_2 = 0$), el III.

---

[1]Nota:

(1) Se hace mención a que no todos los autores recogen estas excepciones. Ord (1967b, p.650) elude profundizar en este aspecto de la clasificación y se limita a decir que ésta es análoga a la clasificación de Pearson continua. Posteriormente el mismo Ord (1972, p.84) recoge solo la segunda excepción y Johnson, Kotz and Kemp (1992, p.81) ninguna de las dos, por citar sólo a los autores más notables sobre el tema.

(2) Se hace mención también a la necesidad de excluir los casos citados como se comprueba a partir de la tabla 4.3 que hemos generado y calculado los valores de a, b_0, b_1 y b_2 para los diferentes tipos.

El criterio κ se complementa con el índice de dispersión:

$$I = \frac{\mu_2}{\mu_1'}$$

utilizado en aquellas distribuciones cuyo extremo inferior del conjunto soporte sea finito.

Las Tablas 4.1, 4.2 y 4.4, tomadas de Ord (1967b, p.651), reproducidas en Ord (1972, pp.86-87) y adaptadas en Johnson, Kotz and Kemp (1992, p.83), han sido aquí completadas y se añade la Tabla 4.3, en la que se indican valores de los diferentes parámetros utilizados en la clasificación de Ord.

4.3.1. Generalización de Bowman, Shenton y Kastenbaum

Bowman, Shenton y Kastenbaum (1991) presentaron las siguientes generalizaciones de la familia de Ord:

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = 1 + \frac{\alpha - i}{c_0 + c_1(i-\mu) + c_2(i-\mu)^2} \tag{4.6}$$

donde $\mu = E[X]$; c_0, c_1, c_2 y α son parámetros,
y también:

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = 1 + \frac{\alpha - i}{c_0 + c_1(i-\mu) + c_2(i-\mu)^2 + c_3(i-\mu)^3 + c_4(i-\mu)^4} \tag{4.7}$$

donde $\mu = E[X]$; c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 y α son parámetros.

Ambas para valores $i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

4.3.2. Familia de Herrerías

Herrerías (1976) propone la siguiente extensión del sistema de Pearson discreto:

$$\triangle p_{i-1} = \frac{a_0 + a_1 i + a_2 i(i-1)}{b_0 + b_1 i + b_2 i(i-1) + b_3 i(i-1)(i-2)} \cdot p_{i-1} \tag{4.8}$$

equivalente a:

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = \frac{b_3 i^3 + i^2(b_2 - 3b_3 + a_2) + i(b_1 - b_2 + 2b_3 + a_1 - a_2) + (b_0 + a_0)}{b_3 i^3 + i^2(b_2 - 3b_3) + i(b_1 - b_2 + 2b_3) + b_0} \tag{4.9}$$

Las restricciones a observar en los parámetros serían equivalentes a las comentadas para (4.5).

Trivialmente se observa que si $a_0 = b_0 = 0 \neq a_2$ ó $a_2 = b_3 = 0 \neq a_1$, se obtienen (4.1) ó (4.5).

Al conjunto de distribuciones que verifican (4.8) ó (4.9) le llamaremos **familia de distribuciones de Herrerías**.

Teorema 4.6 *La solución general de (4.8) ó (4.9) es:*

$$p_i = p_0 \cdot \prod_{j=1}^{i} \left[1 + \frac{a_0 + a_1 j + a_2 j(j-1)}{b_0 + b_1 j + b_2 j(j-1) + b_3 j(j-1)(j-2)}\right], i \geq 1 \tag{4.10}$$

siendo p_0 *tal que* $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

Demostración:

Sea $i \geq 1$:

$$p_i = \left[\frac{b_3 i^3 + i^2(b_2 - 3b_3 + a_2) + i(b_1 - b_2 + 2b_3 + a_1 - a_2) + (b_0 + a_0)}{b_3 i^3 + i^2(b_2 - 3b_3) + i(b_1 - b_2 + 2b_3) + b_0}\right] \cdot p_{i-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{a_0 + a_1 i + a_2 i(i-1)}{b_0 + b_1 i + b_2 i(i-1) + b_3 i(i-1)(i-2)}\right] \cdot p_{i-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{a_0 + a_1 i + a_2 i(i-1)}{b_0 + b_1 i + b_2 i(i-1) + b_3 i(i-1)(i-2)}\right].$$

$$\cdot \left[1 + \frac{a_0 + a_1(i-1) + a_2(i-1)(i-2)}{b_0 + b_1(i-1) + b_2(i-1)(i-2) + b_3(i-1)(i-2)(i-3)}\right] \cdot p_{i-2} =$$

$$\cdots$$

$$= \prod_{j=1}^{i} \left[1 + \frac{a_0 + a_1 j + a_2 j(j-1)}{b_0 + b_1 j + b_2 j(j-1) + b_3 j(j-1)(j-2)}\right] \cdot p_0$$

con p_0 tal que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. □

Corolario 4.6.1 *La solución general de (4.1), (4.4) ó (4.5) es:*

$$p_i = p_0 \cdot \prod_{j=1}^{i} \left[1 + \frac{a-j}{b_0 + b_1 j + b_2 j(j-1)}\right], i \geq 1 \tag{4.11}$$

siendo p_0 *tal que* $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

Demostración:

Basta utilizar la conclusión del Teorema 4.6 haciendo $a_2 = b_3 = 0 \neq a_1$. □

Herrerías obtiene una relación de recurrencia entre los momentos ordinarios para las distribuciones soluciones de (4.8) ó (4.9) y con soporte finito, que generaliza la dada por Ord (1967b, p.649).

Pertenecen a la familia propuesta por Herrerías las siguientes distribuciones:

(1) Obviamente todas las que verifican (4.1), recogidas en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3.

(2) Zipf-Estoup (Johnson, Kotz and Kemp, 1992, p.466).

Esta distribución usada, principalmente, en lingüística, tiene como función de masa de probabilidad:[2]

$$p_i = c \cdot i^{-(\rho+1)}, i = 0, 1, 2, ..., \rho > 0$$

y verifica que:

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = \left(\frac{i-1}{i}\right)^{\rho+1}$$

- Si $\rho = 2 \Rightarrow \dfrac{p_i}{p_{i-1}} = \dfrac{i^3 - 3i^2 + 3i - 1}{i^3}$
  $a_0 = -b_3, a_1 = 0, a_2 = -3b_3, b_0 = 0, b_1 = b_3, b_2 = 3b_3; b_3 \neq 0$
- Si $\rho = 1 \Rightarrow \dfrac{p_i}{p_{i-1}} = \dfrac{i^2 - 2i + 1}{i^2}$
  $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0$
  (Obsérvese que se verifica (4.5), pero la distribución no pertenece al sistema de Ord por tener nulas las dos raíces del denominador)

(3) Binomial, $p_i = \binom{n}{i}.p^i.q^{n-i}, i = 0, 1, 2, ..., n$, con $p + q = 1$, $p > 0, q > 0$:

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = \frac{-pi + p(n+1)}{qi}$$

$a_0 = p(n+1), a_1 = -1, a_2 = 0, b_0 = 0, b_1 = q, b_2 = 0, b_3 = 0$

---

[2] $c = \frac{1}{\zeta(\rho+1)}$, siendo $\zeta(.)$ la función **zeta de Riemann**, definida como $\zeta(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-z}$, convergente para $Re(z) > 1$ (Luke, 1969, p.27). La función $\zeta(z)$ es un caso particular de la función **generalizada zeta de Riemann**, $\zeta(z, v) = \sum_{i=0}^{\infty} (v+i)^{-z}$, para $v \neq 0, -1, -2, ...$, convergente para $Re(z) > 1$, y verificándose que $\zeta(z) = \zeta(z, 1)$. (Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger F. and Tricomi, F.G., 1953, p.24, p.32)

4.3.3. Familia de distribuciones de Ollero y Ramos

Ollero y Ramos (1995) imponen las siguientes restricciones a las distribuciones soluciones de la ecuación (4.1):

(1) Soporte $T = \{m, m+1, ..., M\}, m \geq 0$

(2) $b_0 = 0$, $b_2 \neq 0$.

(3) $\dfrac{b_1}{b_2} + 2m \in \mathbb{R}^+$

quedando así definida una nueva familia, a la que llaman $\mathcal{P}_H$.

Consideraciones sobre los diferentes parámetros de la familia

Si escribimos (4.1) en la forma siguiente:

$$\triangle p_{i-1} = \frac{a-i}{b_2 i(i-1+\frac{b_1}{b_2})} \cdot p_{i-1} \tag{4.12}$$

Observamos que para mantener el carácter de cociente (polinomio de primer grado en i en el numerador y polinomio de segundo grado en el denominador), para todo valor $i \in \{m, m+1, ..., M\}$, debemos exigir que $a \neq 0$ y $a \neq 1 - \dfrac{b_1}{b_2}$.

Propiedades de la función de masa de probabilidad de la familia $\mathcal{P}_H$

Teorema 4.7 *Si $F \in \mathcal{P}_H$, se verifica que:*

(a) $(b_1 - 1)(M+1) + b_2 M(M+1) + a = 0$

(b) $m = 0$ *ó* $m = 1 - \dfrac{b_1}{b_2}$.

Demostración:

Consideremos la expresión:

$$\left[b_2 i^2 + i(b_1 - b_2) + b_0\right] \cdot p_i = \left[b_2 i^2 + i(b_1 - b_2 - 1) + (a + b_0)\right] \cdot p_{i-1}$$

equivalente a (4.5) y por tanto a (4.1) y (4.4), pero evitando posibles anulaciones de los denominadores.

Ya que el soporte de las distribuciones de $\mathcal{P}_H$ es $[m, M]$, debe verificarse que $p_i \neq 0$ si $i = m, m+1, ..., M$ y $p_i = 0$ en otro caso.

(1) Si $i = M + 1$,

$$\left[b_2(M+1)^2 + (M+1)(b_1 - b_2) + b_0\right] \cdot p_{M+1} =$$

$$= \left[b_2(M+1)^2 + (M+1)(b_1 - b_2 - 1) + (a + b_0)\right] \cdot p_M$$

y, como $p_{M+1} = 0$ y $p_M \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_2(M+1)^2 + (M+1)(b_1 - b_2 - 1) + (a + b_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b_1 - 1)(M+1) + b_2 M(M+1) + a = 0,$$

por ser $b_0 = 0$.

(2) Si $i = m$,

$$\left[b_2 m^2 + m(b_1 - b_2) + b_0\right] \cdot p_m = \left[b_2 m^2 + m(b_1 - b_2 - 1) + (a + b_0)\right] \cdot p_{m-1}$$

y, como $p_{m-1} = 0$ y $p_m \neq 0 \Rightarrow b_2 m^2 + m(b_1 - b_2) + b_0 = 0 \Rightarrow m = 0$ ó $m = 1 - \dfrac{b_1}{b_2}$, por ser $b_0 = 0$.

$\square$

Corolario 4.7.1 *Sea F una distribución de $\mathcal{P}_H$. Se verifica que:*

(1) Si $1 - \dfrac{b_1}{b_2} \notin \mathbb{Z}^+$, *entonces* $m = 0$.

(2) Si $1 - \dfrac{b_1}{b_2} \in \mathbb{Z}^+$, *entonces* $m = 1 - \dfrac{b_1}{b_2}$.

Demostración:

(1) Según el Teorema 4.7 $m = 0$ ó $m = 1 - \dfrac{b_1}{b_2}$.

Si $1 - \dfrac{b_1}{b_2} \notin \mathbb{Z}^+$

(a) $1 - \dfrac{b_1}{b_2} = 0 \Rightarrow m = 0$

(b) $1 - \dfrac{b_1}{b_2} \neq 0 \Rightarrow m \neq 1 - \dfrac{b_1}{b_2}$, por tanto $m = 0$.

(2) Si en (4.5) hacemos $b_0 = 0$, se tiene:

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = \frac{b_2 i^2 + i(b_1 - b_2 - 1) + a}{b_2 i^2 + i(b_1 - b_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2 i(i + \frac{b_1}{b_2} - 1)p_i = [b_2 i^2 + i(b_1 - b_2 - 1) + a]p_{i-1} \tag{4.13}$$

Para $i^* = 1 - \dfrac{b_1}{b_2} \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $p_{i^*-1} = 0$, ya que $a \neq 1 - \dfrac{b_1}{b_2}$. Aplicando reiteradamente (4.4) se obtiene $p_{i^*-2} = 0 = ... = p_0$. Por tanto $m > 0 \Rightarrow m = 1 - \dfrac{b_1}{b_2}$.

□

Corolario 4.7.2 *El valor de M es una de las raíces de la ecuación:*

$$b_2 x^2 + (b_1 + b_2 - 1)x + b_1 + a - 1 = 0 \tag{4.14}$$

Demostración:

Basta sustituir M en el primer miembro de (4.14) y comprobar que vale cero, aplicando el Teorema 4.7. $\square$

Corolario 4.7.3 *La segunda raíz de la ecuación (4.14) es:* $\dfrac{1-b_1}{b_2} - M - 1.$

Demostración:

La demostración es trivial conociendo que la otra raíz de (4.14) es M. $\square$

Teorema 4.8 *Sean α y β las raíces de la ecuación:*

$$b_2x^2 + (b_1 + b_2 - 1)x + b_1 + a - 1 = 0 \tag{4.15}$$

Se verifica que :

$$(\alpha + k)(\beta + k) = \frac{(b_1 - 1)(1 - k) - b_2k(1 - k) + a}{b_2} \tag{4.16}$$

siendo k un valor arbitrario.

Demostración:

Si α y β son las raíces de (4.15), se verifica que:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{b_1 + a - 1}{b_2}$$
$$\alpha + \beta = \frac{-b_1 - b_2 + 1}{b_2}$$

y, en consecuencia, para cada k:

$$(\alpha + k)(\beta + k) = \alpha\beta + (\alpha + \beta)k + k^2 = \frac{b_1 + a - 1}{b_2} - \frac{(b_1 + b_2 - 1)k}{b_2} + k^2 =$$

$$\frac{b_1 + a - 1 - b_1k - b_2k + k + b_2k^2}{b_2} = \frac{(b_1 - 1)(1 - k) - b_2k(1 - k) + a}{b_2}$$

$\square$

Teorema 4.9 *Sean α y β las raíces de la ecuación (4.15), y sea $\{p_i\}$, $m \leq i \leq M$, la f.m.p. de una distribución $F \in \mathcal{P}_H$. Se verifica que:*

$$\prod_{i=1}^{k} i \cdot \frac{p_{m+i}}{p_{m+i-1}} = \frac{(m - \alpha)_k (m - \beta)_k}{(\frac{b_1}{b_2} + 2m)_k} \tag{4.17}$$

para $1 \leq k \leq M - m$.

Demostración:

Demostremos que

$$i \cdot \frac{p_{m+i}}{p_{m+i-1}} = \frac{(m - \alpha + i - 1)(m - \beta + i - 1)}{(\frac{b_1}{b_2} + 2m + i - 1)}$$

para $1 \leq i \leq k$, con lo que se concluirá la igualdad propuesta.

De (4.5) se deduce que:

$$i \cdot \frac{p_{m+i}}{p_{m+i-1}} = i \cdot \frac{b_2(m+i)^2 + (m+i)(b_1 - b_2 - 1) + a}{b_2(m+i)^2 + (m+i)(b_1 - b_2)} =$$

$$= i \cdot \frac{a + (b_1 - 1)(m+i) + b_2(m+i)(m+i-1)}{b_1(m+i) + b_2(m+i)(m+i-1)} =$$

$$= \frac{\frac{(b_1-1)(m+i)+b_2(m+i)(m+i-1)+a}{b_2}}{\frac{\frac{b_1(m+i)}{b_2}+(m+i)(m+i-1)}{i}} = \frac{(\alpha - m - i + 1)(\beta - m - i + 1)}{\frac{b_1}{b_2} + 2m + i - 1} =$$

$$\frac{(-\alpha + m + i - 1)(-\beta + m + i - 1)}{\frac{b_1}{b_2} + 2m + i - 1}$$

ya que

(1) De (4.16)

$$(\alpha - m - i + 1)(\beta - m - i + 1) = \frac{(b_1 - 1)(m+i) + b_2(m+i)(m+i-1) + a}{b_2}$$

(2) Veamos que $\dfrac{\frac{b_1(m+i)}{b_2} + (m+i)(m+i-1)}{i} = \dfrac{b_1}{b_2} + 2m + i - 1$. En efecto,

a) Si $m = 0$, la igualdad es trivial.

b) Si $m \neq 0$, del Teorema 4.7 se sigue que $b_1 = b_2(1-m)$ y por tanto que $\frac{b_1}{b_2} = 1 - m$. La demostración se finaliza sustituyendo el valor de $\frac{b_1}{b_2}$ en los dos miembros de la igualdad requerida.

□

Teorema 4.10 *Sean α y β las raíces de la ecuación (4.15). Para una distribución $F \in \mathcal{P}_H$, se verifica que:*

$$\sum_{k=M-m+1}^{\infty} \frac{(m-\alpha)_k(m-\beta)_k}{(\frac{b_1}{b_2}+2m)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} = 0 \tag{4.18}$$

Demostración:

Demostremos, en primer lugar, que el primer sumando es nulo.

Sea $k = M - m + 1$:

$$\frac{(m-\alpha)\cdots(m-\alpha+M-m+1-1)(m-\beta)\cdots(m-\beta+M-m+1-1)}{(\frac{b_1}{b_2}+2m)_{M-m+1}} =$$

$$= \frac{(m-\alpha)(m-\alpha+1)\cdots(M-\alpha)(m-\beta)(m-\beta+1)\cdots(M-\beta)}{(\frac{b_1}{b_2}+2m)_{M-m+1}} =$$

$$= \frac{(\alpha - m)(\alpha - m - 1)\cdots(\alpha - M)(\beta - m)(\beta - m - 1)\cdots(\beta - M)}{(\frac{b_1}{b_2} + 2m)_{M-m+1}}.$$

Por otra parte por el Teorema 4.8, se tiene que la anterior expresión es igual a

$$\frac{\frac{(b_1-1)(m+1)+b_2 m(m+1)+a}{b_2} \cdot \frac{(b_1-1)(m+2)+b_2(m+1)(m+2)+a}{b_2} \cdots \frac{(b_1-1)(M+1)+b_2 M(M+1)+a}{b_2}}{(\frac{b_1}{b_2} + 2m)_{M-m+1}} = 0$$

ya que $(b_1 - 1)(M + 1) + b_2 M(M + 1) + a = 0$ como se demostró en el Teorema 4.7. Si nos fijamos en cualquier otro sumando, $k = M - m + i$ para $i = 2, 3, ...$, se tiene que el factor

$$(m - \alpha)\cdots(M - \alpha)\cdots(M - \alpha + i - 1)(m - \beta)\cdots(M - \beta)\cdots(M - \beta + i - 1) = 0$$

con lo que se finaliza la demostración. $\square$

Función generatriz de probabilidad para las distribuciones de $\mathcal{P}_H$

Teorema 4.11 *Sean α y β las raíces de la ecuación (4.15). Si $F \in \mathcal{P}_H$, su f.g.p. puede expresarse como:*

$$G(z) = p_m \cdot z^m \cdot {}_2F_1(m - \alpha, m - \beta; \frac{b_1}{b_2} + 2m; z) \tag{4.19}$$

Demostración:

Consideremos la función generatriz de probabilidad para una distribución $F \in \mathcal{P}_H$:

$$G(z) = \sum_{k=m}^{M} p_k z^k = p_m z^m + p_{m+1} z^{m+1} + \cdots + p_M z^M =$$

$$= p_m z^m \cdot \left(1 + \frac{p_{m+1}}{p_m} \cdot z + \frac{p_{m+2}}{p_m} \cdot z^2 + \cdots + \frac{p_M}{p_m} \cdot z^{M-m}\right) =$$

$$= p_m z^m \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{M-m} k! \frac{p_{m+k}}{p_m} \cdot \frac{z^k}{k!}\right) = p_m z^m \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{M-m} \left(\prod_{i=1}^{k} i \cdot \frac{p_{m+i}}{p_{m+i-1}}\right) \cdot \frac{z^k}{k!}\right].$$

Comparemos $1 + \sum_{k=1}^{M-m} \left(\prod_{i=1}^{k} i \cdot \frac{p_{m+i}}{p_{m+i-1}}\right) \cdot \frac{z^k}{k!}$ con ${}_2F_1(m-\alpha, m-\beta; \frac{b_1}{b_2} + 2m; z)$. Como

$${}_2F_1(m-\alpha, m-\beta; \frac{b_1}{b_2} + 2m; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-\alpha)_k (m-\beta)_k}{(\frac{b_1}{b_2} + 2m)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m-\alpha)_k (m-\beta)_k}{(\frac{b_1}{b_2} + 2m)_k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

para demostrar que coinciden, basta tener en cuenta que

$$\prod_{i=1}^{k} i \cdot \frac{p_{m+i}}{p_{m+i-1}} = \frac{(m-\alpha)_k (m-\beta)_k}{(\frac{b_1}{b_2} + 2m)_k}$$

para $1 \leq k \leq M-m$, ya demostrado en el Teorema 4.9 y que

$$\sum_{k=M-m+1}^{\infty} \frac{(m-\alpha)_k (m-\beta)_k}{(\frac{b_1}{b_2} + 2m)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} = 0$$

como se demostró en el Teorema 4.10. □

Figura 4.1: Distribuciones contenidas en el sistema de Ord

Tipo	Nombre	p_i
$I(a)$	Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{Np}{i}\cdot\binom{Nq}{n-i}}{\binom{N}{n}}$
$I(b)$	Hipergeométrica negativa ó beta-binomial	$\dfrac{\binom{k+i-1}{i}\cdot\binom{N-k-i}{Np-k}}{\binom{N}{Np}}$
$I(e)$	-	$\dfrac{\binom{A}{i}\cdot\binom{C}{B-i}}{\binom{A+C}{B}}$
$I(u)$	-	$\alpha\cdot\left\{\binom{A}{C+i}\cdot\binom{B}{D-i}\right\}^{-1}$
$II(a)$	Como $I(a)$	Como $I(a)$, con $n = Np$
$II(b)$	Como $I(b)$	Como $I(b)$, con $k = Nq + 2$
$II(u)$	Como $I(u)$	Como $I(u)$, con $C = B - D$
VI	Beta-Pascal	$\dfrac{A}{k+A}\cdot\dfrac{\binom{k+i-1}{i}\cdot\binom{A+B-1}{A}}{\binom{k+A+B+i-1}{k+A}}$
IV	-	$\alpha\cdot\dfrac{Q(i,c,d)}{Q(i,k+c,b)}, i > 0$ similar expresión para $i < 0$
V	-	Como IV, con $b = 0$
$III(B)$	Binomial	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot q^{n-i}$
$III(N)$	Binomial negativa	$\binom{k+i-1}{i}\cdot p^k\cdot q^i$
$III(P)$	Poisson	$e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^i}{i!}$
VII	t de Student discreta	$\alpha_k\cdot\left[\prod_{j=1}^{k}\left\{(j+i+c)^2+b^2\right\}\right]^{-1}$

Figura 4.2: Continuación de la Tabla 2.1

Tipo	Criterio	Soporte
$I(a)$	$I = \frac{(N-n)(1-p)}{N-1} < 1$ $\kappa = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Np+1}{n+1} + \frac{n+1}{Np+1}\right) + \frac{1}{2} > 1$	$[Max(0, n - Nq), min(n, Np)]$
$I(b)$	$\kappa = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Nq+1}{1-k} + \frac{1-k}{Nq+1}\right) + \frac{1}{2} < 0$	$[0, Nq]$
$I(e)$	$\kappa = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{A+1}{B+1} + \frac{B+1}{A+1}\right) + \frac{1}{2} > 1$	$[0, \infty)$
$I(u)$	$\kappa = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{C}{B-D} + \frac{B-D}{C}\right) + \frac{1}{2} > 1$	$[0, n], n < D$
$II(a)$	$I = \frac{N(1-p)^2}{N-1} < 1$, $\kappa = 1$	Como $I(a)$
$II(b)$	$\kappa = 0$	Como $I(b)$
$II(u)$	$\kappa = 1$	Como $I(u)$
VI	$I > 1$ $\kappa = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{k-1}{B-1} + \frac{B-1}{k-1}\right) + \frac{1}{2} > 1$	$[0, \infty)$ $A = M - 1, B = N - M$
IV	$0 < \kappa = \frac{c^2}{c^2+d^2} < 1$	$(-\infty, +\infty)$
V	$\kappa = \frac{c^2}{c^2+d^2}$	$[0, \infty)$ ó $(-\infty, +\infty)$
$III(B)$	$I = q < 1$, $\kappa \to \infty$	$[0, n]$
$III(N)$	$I = \frac{1}{p} > 1$, $\kappa \to \infty$	$[0, \infty)$
$III(P)$	$I = 1$, $\kappa \to \infty$	$[0, \infty)$
VII	$0 < \kappa = \frac{c^2}{c^2+b^2} < 1$	$(-\infty, +\infty)$

Figura 4.3: Valores de los diferentes parámetros para las distribuciones recogidas en el sistema de Ord

Tipo	b_0	b_1	b_2	a
$I(a)$	0	$\frac{Nq-n+1}{N+2}$	$\frac{1}{N+2}$	$\frac{(Np+1)(n+1)}{N+2}$
$I(b)$	0	$\frac{-N+k}{1-Np}$	$\frac{1}{1-Np}$	$\frac{(Nq+1)(1-k)}{1-Np}$
$I(e)$	0	$\frac{C-B+1}{A+C+2}$	$\frac{1}{A+C+2}$	$\frac{(A+1)(B+1)}{A+C+2}$
$I(u)$	$\frac{-(D+1)(A-C+1)}{A+B+2}$	$\frac{A-C+D+1}{A+B+2}$	$\frac{-1}{A+B+2}$	$\frac{-C(B+1)+(A+1)(D+1)}{A+B+2}$
$II(a)$	0	$\frac{N-2n+1}{N+2}$	$\frac{1}{N+2}$	$\frac{(n+1)^2}{N+2}$
$II(b)$	0	$\frac{2-Np}{1-Np}$	$\frac{1}{1-Np}$	$\frac{-(Nq+1)^2}{1-Np}$
$II(u)$	$\frac{-(D+1)(A-B+D+1)}{A+B+2}$	$\frac{A-B+2D+1}{A+B+2}$	$\frac{-1}{A+B+2}$	$\frac{(D-B)(B+1)+(A+1)(D+1)}{A+B+2}$
VI	0	$\frac{k+A+B}{A+1}$	$\frac{1}{A+1}$	$\frac{(k-1)(B-1)}{A+1}$
IV	$\frac{(c+k)^2+b^2}{2k}$	$\frac{2c+2k+1}{2k}$	$\frac{1}{2k}$	$\frac{d^2-b^2-k^2-2ck}{2k}$
V	$\frac{(c+k)^2}{2k}$	$\frac{2c+2k+1}{2k}$	$\frac{1}{2k}$	$\frac{d^2-k^2-2ck}{2k}$
$III(B)$	0	$1-p$	0	$p(n+1)$
$III(N)$	0	$\frac{1}{p}$	0	$\frac{q}{p}\cdot(k-1)$
$III(P)$	0	1	0	λ
VII	$\frac{(c+k)^2+b^2}{2k}$	$\frac{2c+2k+1}{2k}$	$\frac{1}{2k}$	$\frac{-k-2c}{2}$

Figura 4.4: Comentarios a las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3

Tipo	Comentarios	Información adicional
$I(a)$	Forma de J o de campana	$q = 1 - p$, $p > 0$, $q > 0$, $N > 0$, $n > 0$
$I(b)$	Forma de J o de campana	$q = 1 - p$, $p > 0$, $q > 0$, $k > 0$
$I(e)$	A y C no enteros, pero con igual parte entera	
$I(u)$	Forma de U	
$II(a)$	Forma simétrica de $I(a)$	
$II(b)$	Forma simétrica de $I(b)$	
$II(u)$	Forma simétrica de $I(u)$	
VI	Forma de J o de campana	
IV	k entero positivo Forma de campana	$Q(i, c, d) = \prod_{j=0}^{i} \{(j + c)^2 + d^2\}$ $0 \leq c \leq 1$, $0 < b < \infty$, $0 < d < \infty$
V	Forma límite de IV	
$III(B)$	Forma límite de $I(a)$, $I(b)$	$q = 1 - p$, $p > 0$, $q > 0$, n entero positivo
$III(N)$	Forma límite de $I(b)$, VI	$q = 1 - p$, $p > 0$, $q > 0$, $k > 0$
$III(P)$	Forma límite de $III(B)$, $III(N)$	$\lambda > 0$
VII	Tipo IV con $d = b$	$0 \leq c \leq 1$, $0 < b < \infty$ k entero positivo, $\alpha_k = Q(k - 1, c, b)$

Bibliografía

[1] Bardwell, G.E. and Crow, E.L. (1964). A two-parameter family of hyper-Poisson distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **59**, 133-141.

[2] Bardwell, G.E. and Crow, E.L. (1965). Estimation of the parameters of the hyper-Poisson distributions, *Classical and Contagious Discrete Distributions*, G.P. Patil (editor), 127-140. Calcutta: Statistical Publishing Society; Oxford: Pergamon Press.

[3] Bowman K.O., Shenton, L.R and Kastenbaum, M.A. (1991). Discrete Pearson Distributions, *Oak Ridge National Laboratory Technical Report*, TM-11899; Oak Ridge, TN.

[4] Carver, H.C. (1919). On the graduation of frequency distributions, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society of America*, **6**, 52-72.

[5] Carver, H.C. (1923). Frequency curves, *Handbook of Mathematical Statistics*, H.L. Rietz (editor), Cambridge MA: Riverside.

[6] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger F. and Tricomi, F.G. (1953). *Higher Transcendental Functions*, **II**, New York: McGraw-Hill.

[7] Gurland, J. and Tripathi, R.C. (1975). Estimation of parameters on some extensions of the Katz family of discrete distributions involving hypergeometric

functions, *Statistical Distributions in Scientific Work*, **1**: *Models and Structures*, G.P. Patil, S. Kotz and J.K. Ord (editors), 59-82. Dordrecht: Reidel.

[8] Gurland, J. and Tripathi, R.C. (1977). A General Family of Discrete Distributions with Hypergeometric Probabilities, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **39**, 349-356.

[9] Gurland, J. and Tripathi, R.C. (1979). Some aspects of the Kemp families of distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **8**, 855-869.

[10] Herrerías, R. (1976). Extensión del sistema de distribuciones discretas de Pearson, *Cuadernos de Estadística Matemática. Facultad de Ciencias. Granada, Serie A*, **3**, 30-36.

[11] Janardan, K.G. and Patil, G.P. (1972). A unified approach for a class of multivariate hypergeometric models, *Sankhya, Series A*, **34**, 363-376.

[12] Johnson, N.L. and Kotz, S. (1977). *Urn Models and Their Application*, New York: Wiley.

[13] Johnson, N.L., Kotz, S. and Kemp, A.W. (1992). *Univariate Discrete Distributions*, second edition, New York: John Wiley & Sons.

[14] Jordan, C. (1927). Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées, *Comptes Rendus, Académie des Sciences, Paris*, **184**, 315-317.

[15] Katz, L. (1945). *Characteristics of Frequency Functions Defined by First Order Difference Equations*, Dissertation, Ann Arbor, MI: University of Michigan.

[16] Katz, L. (1946). On the class of functions defined by the difference equation $(x+1)f(x+1) = (a+bx)f(x)$ (abstract), *Annals of Mathematical Statistics*, **17**, 501.

[17] Katz, L. (1948). Frequency functions defined by the Pearson difference equation (abstract), *Annals of Mathematical Statistics*, **19**, 120.

[18] Katz, L. (1965). Unified treatment of a broad class of discrete probability distributions, *Classical and Contagious Discrete Distributions*, G.P. Patil (editor), 175-182. Calcutta: Statistical Publishing Society; Oxford: Pergamon Press.

[19] Luke, Y.L. (1969). *The Special Functions and their Approximations*, Volume 1, New York: Academic Press.

[20] Ollero, J. and Ramos, H.M. (1995). Description of a Subfamily of the Discrete Pearson System as Generalized-Binomial Distributions, *Journal of the Italian Statistical Society*, **2**, 235-249.

[21] Ord, J.K. (1967a). Graphical methods for a class of discrete distributions, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **130**, 232-238.

[22] Ord, J.K. (1967b). On a system of discrete distributions, *Biometrika*, **54**, 649-656.

[23] Ord, J.K. (1972). *Families of Frequency Distributions*, London: Griffin.

[24] Patil, G.P. and Joshi, S.W. (1968). *A Dictionary and Bibliography of Discrete Distributions*, Edinburgh: Oliver and Boyd.

[25] Pearson, K. (1895). Contributions to the mathematical theory of evolution I. Skew distribution in homogeneous material, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **186**, 343-414.

[26] Sundt, B. and Jewell, W.S. (1981). Further results on recursive evaluation of compound distributions, *ASTIN Bulletin*, **18**, 27-39.

[27] Willmot, G.E. (1988). Sundt and Jewell's family of discrete distributions, *ASTIN Bulletin*, **18**, 17-29.