Capítulo 5

Familia NEF-QVF

5.1. Introducción

La familia exponencial natural (NEF) ha sido una familia muy estudiada a lo largo de la historia, entre los numerosos trabajos podemos citar el dado por Barndorff-Nielsen (1978) y Brown (1986).

Esta familia adquiere una considerable importancia en el problema de la estimación puntual de una función paramétrica $h(\theta)$. Si recordamos, en la construcción de un estimador insesgado de mínima varianza, las propiedades de completitud (Lehmann y Scheffé (1950)) y suficiencia ((Fisher (1920)) son determinantes.

La familia NEF admite un estadístico suficiente y completo, y cuando esto ocurre los teoremas de Blackwell-Rao (Blackwell (1947), Rao (1945)) y Lehmann-Scheffé (1950) proporcionan un método para construir el estimador insesgado de mínima varianza (si existe) de una función paramétrica $h(\theta)$, en el cual se requiere inicialmente un estimador insesgado de la función paramétrica y que vendrá determinado por la esperanza condicionada de éste al estadístico suficiente y completo. Este método inició este área de la estimación y fue ampliamente utilizado. Sin embargo una gran mayoría de autores (ya sea utilizando la técnica anterior u otra alternativa) no proporcionan una expresión para la varianza de los estimadores dados, de vital importancia para el estudio de su precisión.

Por otro lado, Abbey y David (1970), proporcionaron una expresión para la varianza de los estimadores en la familia de densidades exponencial uniparamétrica, desarrollando un método para obtener el estimador óptimo sin necesidad de conocer un estimador insesgado de $h(\theta)$, y por tanto sin aplicar el teorema de Blackwell-Rao, expresando el estimador en términos de polinomios ortogonales.
Este procedimiento ya fue utilizado por Seth (1949) en una subclase de la familia exponencial para estimar el parámetro de la familia.
Morris (1982,1983), estudió la familia exponencial natural con función de varianza cuadrática siguiendo la línea de Abbey y David (1970).

En este Capítulo, introducimos la familia NEF-QVF compuesta por seis familias de distribuciones: Normal, Gamma, Poisson, Binomial, Binomial Negativa y Secante Hiperbólica Generalizada, recapitulando sus propiedades más importantes y particularizándolas para cada una de las familias componentes. Sin ocuparnos, al no ser objeto de este libro, del problema de la estimación insesgada, ver Morris (1983). Sin embargo, sí es necesario recalcar las ventajas que supone el utilizar polinomios ortogonales en la teoría de la estimación con respecto a propiedades tales como la determinación de la varianza del estimador, así como la obtención de forma inmediata de las cotas para la varianza anterior. También, destacar su utilidad en el estudio de las propiedades asintóticas de los estimadores insesgados de la familia bajo estudio, ver López-Blázquez et al. (1999). La técnica de los polinomios ortogonales es también muy útil en otras áreas, ver López-Blázquez et al. (2000a, 2000b).

5.2. Definición y propiedades de la NEF-QVF

Sea F_0 una función de distribución con función generatriz de momentos en un entorno de cero.

Se define la función

$$\psi(\theta) = \log \int \exp(\theta x) dF_0(x), \quad \theta \in \Theta$$

con Θ el intervalo más grande para el cual está definida $\psi(\theta)$.
Entonces la familia paramétrica de distribuciones

$$\{F_\theta, \quad \theta \in \Theta\}$$

definida por

$$dF_\theta = \exp\{\theta x - \psi(\theta)\} dF_0$$

es una familia exponencial natural de distribuciones (NEF), que puede ser generada por cualquiera de sus miembros, (Morris (1982)).

La función generatriz de cumulantes de la familia viene dada por:

$$\psi_\theta(t) = \log \int \exp(tx) dF_\theta(x) = \psi(t+\theta) - \psi(\theta) \tag{5.1}$$

con lo cual **el cumulante r-ésimo** es

$$C_r = \left.\frac{d^r \psi_\theta(t)}{d\theta^r}\right|_{t=0} = \psi^{r)}(\theta). \tag{5.2}$$

Así, la media y varianza de la familia dadas por los cumulantes primero y segundo respectivamente son:

$$\mu = E_\theta(X) = \psi'(\theta)$$

$$V(\mu) = \mathrm{Var}_\theta(X) = \psi''(\theta).$$

Como $V(\mu) = \psi''(\theta) > 0$, se tendrá que $\mu = \psi'(\theta)$ es una función $1-1$ del parámetro θ. Por tanto tiene sentido reparametrizar la familia y considerar el valor medio, μ, como parámetro, cuyo dominio viene dado por $\Omega = \psi'(\Theta)$ denominado el espacio de medias.

Al par $(\Omega, V(\mu))$ se le denomina función de varianza de la NEF, de gran importancia pues caracteriza a la NEF dentro de todas las familias de distribuciones NEF, (aunque no en una clase más amplia de distribuciones), ya que ésta determina la función generatriz de cumulantes y por tanto la función característica.

A continuación consideraremos una serie de propiedades que verifica la familia de distribuciones exponencial natural, útiles para el desarrollo de una teoría de la estimación siguiendo la línea de Abbey y David (1970).

Proposición 5.1 *Sea X una variable aleatoria cuya distribución pertenece a la NEF, entonces:*

(1) Existen y son finitos todos los momentos no centrados, i.e.

$$E_\theta(X^k) < +\infty, \qquad k = 0, 1, 2 \dots$$

(2) Si C_r es el cumulante de orden r, entonces se verifica

$$\begin{aligned} C_1(\mu) &= \mu \\ C_2(\mu) &= V(\mu) \\ C_{r+1}(\mu) &= V(\mu) C_r'(\mu), \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(3) Si notamos $\mu_k = E_\theta(X^k)$, se verifica que

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \mu_i C_{k-i}(\mu), \quad k = 1, 2 \dots \tag{5.3}$$

(4) Sea $M_j = E_\theta[(X-\mu)^j]$ los correspondientes momentos centrados, entonces verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0 \\ M_2 &= C_2(\mu) \\ M_3 &= C_3(\mu) \\ M_k &= C_k(\mu) + \sum_{i=2}^{k-2} \binom{k-1}{i} M_i C_{k-i}(\mu), \quad k = 4, 5, \dots \end{aligned} \tag{5.4}$$

Demostración:

(1) Esta propiedad se tiene directamente de la existencia de la función generatriz de momentos de la variable X, en un entorno de cero, ya que

$$E_\theta\left(e^{tX}\right) = e^{\psi_\theta(t)}$$

con $\psi_\theta(t)$ la función generatriz de cumulantes dada en (5.1).

(2) Se deduce a partir de (5.2).

(3) Si $\phi_\theta(t) = E_\theta\left(e^{tX}\right)$ se prueba por inducción

$$\phi_\theta^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} \phi_\theta^{(j)}(t) \psi_\theta^{(r-j)}(t), \quad r = 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

con ψ_θ la función generatriz de cumulantes de la variable aleatoria X.

Evaluando (5.5) en $t = 0$, obtenemos (5.3).

Obsérvese que esta propiedad es cierta para X, variable aleatoria genérica tal que $E(X^m) < \infty$, con k variando en (5.3) hasta m.

(4) Sustituyendo X por $X - \mu$ en la relación (5.5) y evaluando la expresión resultante en $t = 0$ se deduce (5.4).

□

Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria simple procedente de una familia exponencial natural, con $E_\theta(X) = \mu$ y función de varianza $V(\mu)$, $\mu \in \Omega$, entonces se verifica el siguiente resultado.

Proposición 5.2

(1) El estadístico $\sum_{i=1}^{n} X_i$ *es suficiente y completo para dicha familia.*

(2) El estadístico $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, *que también es suficiente y completo, es el UMVUE y EMV de* μ.

Demostración:

(1) Se deduce directamente de la expresión de la densidad conjunta de la muestra:

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \exp\left\{\theta \sum_{i=1}^{n} x_1 - n\psi(\theta)\right\} \prod_{i=1}^{n} dF_0(x_i). \tag{5.6}$$

(2) Como $E_\theta(\overline{X}_n) = E_\theta(X) = \mu$ con varianza $V(\mu)/n$, obviamente $\overline{X}_n$ es el UMVUE de μ.

Además $\overline{X}_n$ hace máximo la función $\log f(x_1, \ldots x_n, \theta)$, por tanto es de máxima verosimilitud.

$\square$

Además la NEF es cerrada por convoluciones y combinaciones lineales.

Nos centraremos en la familia exponencial natural con función de varianza cuadrática (NEF-QVF). Por tanto su función de varianza vendrá dada por:

$$V(\mu) = v_0 + v_1\mu + v_2\mu^2, \quad \mu \in \Omega. \tag{5.7}$$

Las propiedades anteriores (ciertas para cualquier NEF) se verifican en particular para la NEF-QVF. De esta forma se tiene que la distribución del estadístico $\overline{X}_n$ pertenece a la NEF-QVF con función de varianza $V(\mu)/n, \quad \mu \in \Omega$, por ser una familia cerrada por convoluciones y combinaciones lineales.

Existen muchas NEF's pero sólo seis tienen función de varianza cuadrática:

Teorema 5.1 *La familia NEF-QVF engloba seis familias de distribuciones: Normal, Gamma, Poisson, Binomial, Binomial Negativa y Secante Hiperbólica Generalizada.*

Demostración: Las cinco primeras familias son muy conocidas, de las cuáles es también conocido que sus distribuciones pertenecen a la NEF. Además, la función de varianza caracteriza a la NEF, así:

Sea una variable aleatoria X, cuya distribución pertenece a la NEF-QVF con función de varianza

$$V(\mu) = v_0 + v_1\mu + v_2\mu^2, \quad \mu \in \Omega.$$

Distinguimos los siguientes casos:

- Si $v_1 = v_2 = 0$ y $v_0 > 0$ ($V(\mu) > 0$), corresponde a la distribución Normal por ser la única NEF con función de varianza constante.

- Si $v_2 = 0$ y $v_1 \neq 0$, o sea las funciones de varianza estrictamente lineales, corresponden a la distribución Poisson y a sus combinaciones lineales.

- Si $v_2 \neq 0$, se trata de funciones de varianza estrictamente cuadráticas, notamos por d a su discriminante, donde

  $$d = v_1^2 - 4v_0v_1.$$

  En este caso realizamos el siguiente cambio de variable,

  $$X^* = aV'(X) = a(v_1 + 2v_2X)$$

  tomando $a = 1$ si $d = 0$ y $a = |dv_2|^{-\frac{1}{2}}$ si $d \neq 0$.

  Como la NEF-QVF es cerrada por combinaciones lineales en el sentido que genera la misma familia de distribuciones, y X^* es una combinación lineal de X, tiene sentido considerar a X^* como el miembro canónico, con media y función de varianza dadas por:

$$\mu^* = aV'(\mu), \quad V(\mu^*) = s + v_2(\mu^*)^2$$

donde $s = -sig(dv_2)$ y $v_2 \neq 0$.

Así, al analizar $V(\mu^*)$, resultan seis casos de los posibles cruces de $v_2 < 0$, $v_2 > 0$ y $s = -1, 0, 1$.

Los casos $v_2 < 0$, $s = -1$ y $v_2 < 0$, $s = 0$ hacen $V(\mu) < 0$, lo cual es imposible, quedando cuatro casos:

- Si $v_2 > 0$ y $s = 0$ que implica $d = 0$, corresponde a la distribución Gamma y a sus combinaciones lineales.
- Si $v_2 < 0$ y $s = 1$ que implica $d > 0$, corresponde a la distribución Binomial y a sus combinaciones lineales.
- Si $v_2 > 0$ y $s = -1$ que implica $d > 0$, corresponde a la distribución Binomial Negativa y a sus combinaciones lineales.
- Si $v_2 > 0$ y $s = 1$, consideramos lo siguiente:

  Sea X la observación natural de una familia exponencial beta, Y, con

  $$Y \sim Be\left(0{,}5 + \frac{\theta}{\pi}, 0{,}5 - \frac{\theta}{\pi}\right), \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

  cuya observación natural viene dada por

  $$X = \frac{1}{\pi} \log \frac{Y}{1 - Y}$$

  que tiene densidad

  $$f_{1,\theta}(x) = \frac{\exp[\theta x + \log(\cos\theta)]}{2\cosh\frac{\pi x}{2}} \tag{5.8}$$

con respecto a la medida de Lebesgue y cuyo soporte es $\mathbb{R}$. La densidad (5.8) se deduce a partir de la fórmula de reflexión, Abramowitz y Stegun (1965), que implica

$$\beta(0{,}5 + t, 0{,}5 - t) = \frac{\pi}{\cos \pi t}.$$

La media y varianza de la densidad (5.8) se obtienen a partir de la función generatriz de cumulantes

$$\psi(\theta) = -\log(\cos\theta)$$

así,

$$E_\theta(X) = \mu = \psi'(\theta) = \tan\theta$$

y

$$\mathrm{Var}_\theta(X) = V(\mu) = \psi''(\theta) = \csc^2\theta = 1 + \mu^2$$

luego la distribución de X pertenece a la NEF-QVF, con $v_2 = 1$ y $s = 1$. A partir de ella, mediante la operación de convolución se obtiene la distribución secante hiperbólica generalizada.

□

Morris (1982) prueba de forma unificada que las distribuciones Normal, Gamma, Poisson, Binomial Negativa y Secante Hiperbólica Generalizada son infinitamente divisibles. La distribución Binomial no verifica dicha propiedad, al ser una distribución acotada.

A partir de la densidad de una NEF-QVF se podrán construir unas funciones con la propiedad de ser funciones elementales, al ser polinomios y la ventaja de ser ortogonales, respecto de dicha densidad, como se verá en la siguiente sección.

5.3. Polinomios Ortogonales

Si $f(x,\theta)$ es la función de densidad o de probabilidad de una NEF-QVF que por definición es proporcional a $\exp\{\theta x - \psi(\theta)\}$ con respecto a alguna medida, definimos:

$$P_k(x;\mu) = V^k(\mu)\left\{\frac{d^k}{d\mu^k} f(x,\theta)\right\}/f(x,\theta), \quad k \geq 0. \tag{5.9}$$

Nótese que la derivada es con respecto a μ, no con respecto a θ.
Además, consideramos la sucesión de números:

$$\begin{aligned} a_k &= k!\prod_{j=0}^{k-1}(1+jv_2), \quad k \geq 1, \\ a_0 &= 1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

En el siguiente resultado se verán propiedades de las funciones definidas en (5.9).

Proposición 5.3 *En las condiciones anteriores, se verifica:*

(1) La familia $\{P_k\}_{k\geq 0}$ verifica la siguiente relación de recurrencia, (suprimiendo los argumentos):

$$\begin{aligned} &P_{k+1} = (P_1 - kV')P_k - k\{1+(k-1)v_2\}VP_{k-1}, \quad k \geq 1 \\ &P_0 = 1; \quad P_1 = x - \mu. \end{aligned} \tag{5.11}$$

(2) $P_k(x;\mu)$ es un polinomio mónico de grado k tanto en x como en μ.

(3) $\{P_k\}_{k\geq 0}$ es una familia de polinomios ortogonales con respecto a la función peso $f(x,\theta)$, verificando la relación de ortogonalidad:

$$E_\theta\left[P_k(X;\mu)P_j(X;\mu)\right] = \delta_{kj}a_kV^k(\mu), \quad k,j \geq 0, \tag{5.12}$$

con δ_{kj} la delta de Kronecker.

(4) Dados $\mu, \mu_0 \in \Omega$, se verifica

$$P_k(x; \mu_0) = a_k \sum_{j=0}^{k} \frac{(\mu - \mu_0)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{1}{a_j} P_j(x; \mu), \quad k \geq 0. \tag{5.13}$$

(5) Dados $\mu, \mu_0 \in \Omega$, se verifica

$$E_\mu[P_k(X; \mu_0)] = \frac{a_k}{k!}(\mu - \mu_0)^k, \quad k \geq 0. \tag{5.14}$$

Demostración:

(1) Por definición,

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= V^{k+1} f^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu}(P_k f V^{-k}) \\ &= (P_1 - kV')P_k + V P_k', \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{5.15}$$

con $P_k' = \dfrac{\partial}{\partial \mu} P_k(x; \mu)$.

Además se prueba por inducción en k, que

$$P_k' = -\frac{a_k}{a_{k-1}} P_{k-1}. \tag{5.16}$$

En general se cumple que

$$\frac{\partial^r}{\partial \mu^r} P_k = (-1)^r \frac{a_k}{a_{k-r}} P_{k-r}. \tag{5.17}$$

Así, a partir de (5.15) y (5.16) se obtiene la relación de recurrencia (5.11).

(2) Se deduce por inducción, a partir de la fórmula de recurrencia (5.11).

(3) A partir de (5.3), se deduce por inducción que el momento no centrado de orden n de una distribución NEF-QVF es un polinomio de grado n en μ.

Así, para $n < k$, se tiene

$$\begin{aligned} E_\theta[X^n P_k] &= V^k(\mu)\int x^n \frac{\partial^k}{\partial\mu^k} f(x,\theta)d\nu(x) \\ &= V^k(\mu)\frac{\partial^k}{\partial\mu^k}E_\theta(X^n) = 0 \end{aligned}$$

luego efectivamente se tiene (5.12) para $k \neq j$.

Para ver la relación (5.12) para $k = j$, multiplicamos (5.11) por P_{k-1} y tomando esperanzas, se demuestra

$$E_\theta[P_1 P_k P_{k-1}] = k\{1 + (k-1)v_2\}E_\theta[P_{k-1}^2]. \quad (5.18)$$

Repitiendo el mismo proceso con P_{k+1}, se obtiene:

$$E_\theta[P_{k+1}^2] = E_\theta[P_1 P_k P_{k+1}] \quad (5.19)$$

con lo cual a partir de (5.18) y (5.19) se verifica que

$$E_\theta[P_k^2] = (k-1)\{1 + (k-2)v_2\}V(\mu)E_\theta[P_{k-1}^2]$$

e iterando,

$$E_\theta[P_k^2] = k!\prod_{j=0}^{k-1}(i + jv_2)V^k(\mu) = a_k V^k(\mu).$$

(4) Como $P_k(x;\mu_0)$ es un polinomio de grado k en μ_0, si se desarrolla en serie de Taylor centrada en μ, se obtiene:

$$P_k(x;\mu_0) = \sum_{j=0}^{k}\frac{(\mu_0-\mu)^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\mu^j}P_k(x;\mu), \quad \forall \mu_0 \in I(\mu) \quad (5.20)$$

y utilizando la expresión (5.17) para la derivada de orden j de P_k:

$$P_k(x;\mu_0) = \sum_{j=0}^{k}\frac{(\mu_0-\mu)^j}{j!}\frac{a_k}{a_{k-j}}P_{k-j}(x;\mu). \quad (5.21)$$

Intercambiando en (5.21) j por $k - j$ se obtiene la expresión (5.13).

(5) Tomando esperanzas en la expresión (5.13):

$$\begin{aligned} E_\mu[P_k(x;\mu_0)] &= a_k \sum_{j=0}^{k} \frac{(\mu-\mu_0)^{k-j}}{(k-j!)} \frac{1}{a_j} E_\mu[P_j(x;\mu)] \\ &= \frac{a_k}{k!}(\mu-\mu_0)^k, \end{aligned}$$

puesto que $E_\mu[P_j(x;\mu)] = \delta_{0j}$ por (5.12).

□

Además el sistema de funciones dado en (5.9) forman un conjunto de polinomios para cualquier familia exponencial natural, siendo ortogonales únicamente si la función de varianza es cuadrática. No obstante, en la NEF, se podría obtener un sistema de polinomios ortogonales, mediante el procedimiento de ortogonalización de Gram-Smidt.

Para cada una de las distribuciones que componen la NEF-QVF se explicitarán las correspondientes familias de polinomios ortogonales, así se tendrá los polinomios de Hermite en el caso Normal, los de Laguerre (generalizados) en el caso de la Gamma, los polinomios de Charlier en el caso de la Poisson, los de Krawtchouk en el caso Binomial, los polinomios de Meixner de primera especie en el caso de la Binomial Negativa y los de Pollaczek en el caso de la Secante Hiperbólica Generalizada.

5.3.1. Apéndice

En este apartado se recogen las características descritas anteriormente, particularizadas para cada una de las familias que componen la NEF-QVF.

Distribución Normal

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ conocido, se tienen las siguientes características:

Función de densidad:

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\theta}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Función generatriz de cumulantes:

$$\psi_\theta(t) = t\theta + \frac{t^2\sigma^2}{2}.$$

Cumulante de orden k:

$$\begin{aligned} C_1(\theta) &= \theta \\ C_2(\theta) &= \sigma^2 \\ C_k(\theta) &= 0, \quad \forall k \geq 3. \end{aligned}$$

Función media: $\mu = \theta$.

Función de varianza: $V(\mu) = \sigma^2, \quad \mu \in \mathbb{R}$.

Momentos no centrados:

$$\mu_k = \mu_{k-1}\theta + (k-1)\mu_{k-2}\sigma^2$$

$$\mu_1 = \theta, \quad \mu_0 = 1.$$

Momentos centrados:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = \sigma^2, \quad M_3 = 0$$

$$M_k = (k-1)M_{k-2}\sigma^2, \quad k \geq 4.$$

Se puede probar que:

$$M_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es impar} \\ (k-1)!!\sigma^k, & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

Estadístico suficiente y completo: $\overline{X}_n$ con función de densidad dada por,

$$f_n(s,\theta) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{s-\theta}{\sigma}\sqrt{n} \right)^2 \right\}. \tag{5.22}$$

Polinomios mónicos ortogonales respecto de (5.22):

$$P_{k,n}(s,\mu) = \frac{\sigma^k}{(2n)^{k/2}} H_k\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \frac{s-\mu}{\sigma} \right), \quad k \geq 0$$

con H_k el correspondiente polinomio de Hermite, cuya expresión es igual a,

$$H_k(x) = k! \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j (2x)^{k-2j}}{(k-2j)!j!}.$$

Fórmula de recurrencia de los polinomios ortogonales

$$\begin{aligned} &P_{k+1,n} = P_{1,n}P_{k,n} - k\frac{\sigma^2}{n}P_{k-1,n}, \quad k \geq 1 \\ &P_{0,n} = 1, \quad P_{1,n} = s - \theta. \end{aligned}$$

Norma de los polinomios ortogonales:

$$E[P_{k,n}^2] = \frac{k!\sigma^{2k}}{n^k}.$$

Distribución Gamma

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $G(\alpha, 1/\theta)$, $\theta > 0$ y $\alpha > 0$ conocido.

Función de densidad:

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad x > 0. \tag{5.23}$$

Función generatriz de cumulantes:

$$\psi_{\theta}(t) = -\alpha \log(1-\theta t). \tag{5.24}$$

Cumulante de orden k:

$$C_k(\theta) = (k-1)!\alpha\theta^k, \quad k \geq 1, \qquad C_1(\theta) = \alpha\theta.$$

Función media: $\mu = \alpha\theta$.
Función de varianza: $V(\mu) = \alpha\theta^2 = \dfrac{\mu^2}{\alpha}, \quad \mu \in (0, +\infty)$.
Momentos no centrados:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \alpha(k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\mu_i \theta^{k-i}}{i!}, \quad k = 1, 2, \ldots \\ \mu_0 &= 1. \end{aligned}$$

Se puede probar que, $\mu_k = \dfrac{\theta^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$.

Momentos centrados:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = \alpha\theta^2, \quad M_3 = 2\alpha\theta^3$$

$$M_k = (k-1)! \left\{ \alpha\theta^k + \sum_{i=2}^{k-2} \frac{\theta^{k-i} M_i}{i!} \right\}, \quad k = 4, 5, \ldots$$

Se puede probar que,

$$M_k = \theta^k \sum_{j=0}^{k} \frac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha)} (-\alpha)^{k-j}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Estadístico suficiente y completo: $\overline{X}_n$ cuya función de densidad viene dada por,

$$f_n(s,\theta) = \frac{n^\alpha}{\theta^\alpha \Gamma(n\alpha)} s^{n\alpha-1} \exp\left(-\frac{ns}{\theta}\right), \quad s > 0. \tag{5.25}$$

Expresión de los polinomios ortogonales respecto de (5.25):

$$P_{k,n}(s;\mu) = \frac{(-1)^k k! \mu^k}{(n\alpha)^k} L_k^{(n\alpha-1)}\left(\frac{n\alpha s}{\mu}\right) \quad \text{k}\geq 0, \tag{5.26}$$

con $L_k^{(\gamma)}$ el correspondiente polinomio de Laguerre generalizado,

$$L_k^{(\gamma)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+\gamma}{k-j} \frac{(-1)^j}{j!} x^j. \tag{5.27}$$

Fórmula de recurrencia de los polinomios ortogonales:

$$P_{k+1,n} = \left(P_{1,n} - \frac{2k\theta}{n}\right) P_{k,n} - k\left\{1 + \frac{1}{n\alpha}(k-1)\right\} \frac{\alpha\theta^2}{n} P_{k-1,n}, \quad k \geq 1$$
$$P_{0,n} = 1, \quad P_{1,n} = s - \alpha\theta.$$

Norma de los polinomios ortogonales:

$$E[P_{k,n}^2] = \frac{k!\Gamma(n\alpha+k)\mu^{2k}}{(n\alpha)^{2k}\Gamma(n\alpha)}.$$

Distribución de Poisson

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $\mathcal{P}o(\theta), \quad \theta > 0$.
Función de probabilidad:

$$f(x,\theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.28}$$

Función generatriz de cumulantes:

$$\psi_\theta(t) = \theta(e^t - 1).$$

Cumulante de orden k:

$$C_k(\theta) = \theta, \quad k \geq 1.$$

Función media: $\mu = \theta$.
Función de varianza: $V(\mu) = \mu, \quad \mu \in (0, +\infty)$.
Momentos no centrados:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \theta \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \mu_i, \quad k = 1, 2 \dots \\ \mu_0 &= 1. \end{aligned}$$

Momentos centrados:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = \theta, \quad M_3 = \theta$$

$$M_k = \theta \left\{ 1 + \sum_{i=2}^{k-2} \binom{k-1}{i} M_i \right\}.$$

Estadístico suficiente y completo: $\overline{X}_n$, cuya función de probabilidad viene dada por,

$$f_n(s, \theta) = \exp(-n\theta) \frac{(n\theta)^{ns}}{(ns)!}, \quad s = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \tag{5.29}$$

Expresión de los polinomios ortogonales respecto de (5.29):

$$P_{k,n}(s; \mu) = \frac{1}{n^k} C_k^{(n\mu)}(ns), \quad \text{k} \geq 0. \tag{5.30}$$

con $C_k^{(\alpha)}$ el k-ésimo polinomio de Charlier,

$$C_k^{(\alpha)}(s) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{s}{j} j! (-\alpha)^{k-j}. \tag{5.31}$$

Fórmula de recurrencia de los polinomios ortogonales:

$$\begin{aligned} &P_{k+1,n} = \left(P_{1,n} - \frac{k}{n} \right) P_{k,n} - \frac{k\theta}{n} P_{k-1,n}, \quad \text{k} \geq 1 \\ &P_{0,n} = 1, \quad P_{1,n} = s - \theta. \end{aligned}$$

Norma de los polinomios ortogonales:

$$E[P_{k,n}^2] = \frac{k!\theta^k}{n^k}$$

Distribución Binomial

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $\mathcal{B}(N,p)$, $p \in (0,1)$ y $N \geq 1$ un entero conocido. Sea $q = 1-p$.

Función de probabilidad:

$$f(x,p) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, \quad x = 0,1,\ldots,N. \tag{5.32}$$

Función generatriz de cumulantes:

$$\psi_p(t) = N\log(pe^t + q).$$

Función media: $\mu = Np$.

Función de varianza: $V(\mu) = Npq = \mu - \dfrac{\mu^2}{N}, \quad \mu \in (0,N)$.

Cumulante de orden k:

$$C_{k+1}(\mu) = (\mu - \frac{\mu^2}{N})C_k'(\mu), \quad k \geq 2$$
$$C_1(\mu) = \mu, \quad C_2(\mu) = \mu - \frac{\mu^2}{N}.$$

Estadístico suficiente y completo: $\overline{X}_n$, cuya función de probabilidad viene dada por,

$$f_n(s,p) = \binom{nN}{ns} p^{ns} q^{n(N-s)}, \quad s = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \tag{5.33}$$

Expresión de los polinomios ortogonales respecto de (5.33):

$$P_{k,n}(s;\mu) = \frac{k!}{n^k} K_{k,Nn,\mu/N}(ns), \quad \text{k=0,1,...,Nn,} \tag{5.34}$$

con $K_{k,N,p}$ el k-ésimo polinomio de Krawtchouk,

$$K_{k,N,p}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{x}{k-j} \binom{N-x}{j} (-1)^j p^j q^{k-j}. \tag{5.35}$$

Fórmula de recurrencia de los polinomios ortogonales:

$$P_{k+1,n} = \left[P_{1,n} - \frac{k}{n}(1-2p) \right] P_{k,n} - k \left\{ 1 - \frac{k-1}{nN} \right\} \frac{Npq}{n} P_{k-1,n}, \quad 1 \leq k \leq Nn-1,$$
$$P_{0,n} = 1, \quad P_{1,n} = s - Np.$$

Norma de los polinomios ortogonales:

$$E[P_{k,n}^2] = \frac{k!\Gamma(nN+1)(pq)^k}{\Gamma(nN-k+1)n^{2k}}.$$

Distribución Binomial Negativa

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $\mathcal{BN}(r,p)$, $p \in (0,1)$, $r \geq 1$ un entero conocido y $q = 1-p$;

Función de probabilidad:

$$f(x,p) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x, \quad x = 0, 1, \ldots. \tag{5.36}$$

Función generatriz de cumulantes:

$$\psi_p(t) = r \log p - r \log(1 - qe^t), \quad t < -\log q. \tag{5.37}$$

Función media: $\mu = \dfrac{rq}{p}$.

Función de varianza: $V(\mu) = \dfrac{rq}{p^2} = \mu + \dfrac{\mu^2}{r}, \quad \mu \in (0, +\infty)$.

Cumulante de orden k:

$$C_{k+1}(\mu) = \left(\mu + \frac{\mu^2}{r} \right) C_k'(\mu), \quad k \geq 2$$
$$C_1(\mu) = \mu, \quad C_2(\mu) = \mu + \frac{\mu^2}{r}.$$

Estadístico suficiente y completo: $\overline{X}_n$, cuya función de probabilidad viene dada por,

$$f_n(s,p) = \binom{nr+ns-1}{ns} p^{nr} q^{ns}, \quad s = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \tag{5.38}$$

Expresión de los polinomios ortogonales respecto de (5.38):

$$P_{k,n}(s;p) = \frac{1}{n^k} (q/p)^k \, m_{k,nr,q}(ns), \quad \mathrm{k}{\geq}0 \tag{5.39}$$

con $m_{k,\alpha,c}(x)$ el k-ésimo polinomio de Meixner de primera especie,

$$m_{k,\alpha,c}(x) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \binom{x}{k} \binom{-x-\alpha}{k-j} c^{-j}. \tag{5.40}$$

Fórmula de recurrencia de los polinomios ortogonales:

$$P_{k+1,n} = \left[P_{1,n} - \frac{k}{n}\left(1 + 2\frac{q}{p}\right)\right] P_{k,n} - \frac{k}{n}\left\{1 + \frac{k-1}{nr}\right\} \frac{q}{p^2} P_{k-1,n}, \quad k \geq 1,$$
$$P_{0,n} = 1, \quad P_{1,n} = s - r\frac{q}{p}.$$

Norma de los polinomios ortogonales:

$$E[P_{k,n}^2] = \frac{k!\Gamma(nr+k)}{\Gamma(nr)} \frac{q^k}{(np)^{2k}}.$$

Distribución Secante Hiperbólica Generalizada

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $GHS(r,\theta)$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ y $r > 0$ un entero conocido.

Función de densidad:

$$f(x;r,\lambda) = (1+\lambda^2)^{-r/2} \exp\{x \tan^{-1}\lambda\} f(x;r,0), \quad x > 0, \tag{5.41}$$

con

$$f(x;r,0) = \frac{2^{r-2}}{\Gamma(r)} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{(r+2j)^2}\right)^{-1} \tag{5.42}$$

y $\lambda = \tan\theta$.

Función generatriz de cumulantes:

$$\psi_\lambda(t) = -r\log(\cos(t) - \lambda\sin(t)).$$

Función media: $\mu = r\lambda = r\tan\theta$.

Función de varianza: $V(\mu) = r(1+\lambda^2) = \dfrac{\mu^2}{r} + r, \quad \mu \in I\!R$.

Cumulante de orden k:

$$\begin{aligned} &C_{k+1}(\mu) = (\mu^2/r + r)C_k'(\mu) \\ &C_1(\mu) = \mu, \quad C_2(\mu) = \mu^2/r + r. \end{aligned}$$

Estadístico suficiente y completo: $\overline{X}_n$ cuya función de densidad viene dada por,

$$f_n(s,\lambda) = n(1+\lambda^2)^{-nr/2}\exp\{ns\tan^{-1}\lambda\}f(ns,nr,0). \tag{5.43}$$

Relación de recurrencia que verifican los polinomios ortogonales respecto de (5.43):

$$\begin{aligned} &P_{k+1,n} = \left(P_{1,n} - \frac{2k\lambda}{n}\right)P_{k,n} - \frac{k}{n}\left\{1 + \frac{k-1}{nr}\right\}r(1+\lambda^2)P_{k-1,n}, \quad k \geq 1 \\ &P_{0,n} = 1, \quad P_{1,n} = s - r\lambda. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Los polinomios descritos en (5.44), salvo constante, son los polinomios de Pollaczek.

Norma de los polinomios ortogonales:

$$E[P_{k,n}^2] = \frac{k!\Gamma(nr+k)}{n^{2k}\Gamma(nr)}(1+\lambda^2)^k.$$

Bibliografía

[1] Abbey, J. L. and David, H. T. (1970). The construction of uniformly variance unbiased estimators for exponential distributions, *The Annals of Mathematical Statistics*, **41**, (4), 1217-1222.

[2] Abramowitz, M. and Stegum, I.A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover.

[3] Barndorff-Nielsen, O. (1978). *Information and exponential families in statistical theory*, Chichester: John Wiley & Sons.

[4] Blackwell, D. (1947). Conditional expectation and unbiased sequential estimation, *The Annals of Mathematical Statistics*, **18**, 105-112.

[5] Brown, L.D. (1986). *Fundamentals of Statistical Exponential Families with Applications in Statistical Decision Theory*. Lecture Notes-Monograph Series, **9**, Institute of Mathematical Statistics

[6] Chihara, T. (1978). *An introduction to orthogonal polinomials*, New York: Gordon & Breach.

[7] Fisher, R.A., (1920). A mathematical examination of the method of determining the accuracy of an observation by the mean square error, *M.N.R. Astron Soc.*, **80**, (8), 758-770.

[8] Lehmann, E.L. and Scheffé, H. (1950). Completeness, similar regions and unbiased estimation, *Sankhya*, **10**, 305-340.

[9] López-Blázquez, F. and Castaño-Martínez, A. (1999). Asymptotic properties of unbiased estimations in the natural exponential family with quadratic variance function, *Sankhya, Series A*, **61**, 292-297.

[10] López-Blázquez, F. and Salamanca-Miño, B. (2000a). Binomial approximation to hypergeometric probabilities, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **87**, 21-29.

[11] López-Blázquez, F. and Salamanca-Miño, B. (2000b). A reverse martingale property that characterizes the natural exponential family with quadratic variance function, *Statistics and Probability Letters*, **49**, n 1, 63-68.

[12] Morris, C. N. (1982). Natural exponential families with quadratic variance functions, *The Annals of Statistics*, **10**, 65-80.

[13] Morris, C.N. (1983). Natural exponential families with quadratic variance functions: Statistical theory, *The Annals of Statistics*, **11**, 515-529.

[14] Rao, C.R. (1945). Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, *Bulletin Calcutta Math. Society*, **37**, 81-91.

[15] Seth, G.R. (1949). On the variance of estimates, *The Annals of Mathematical Statistics*, **20**, 1-27.