Tema 1

Polinomios: operaciones y simplificación

M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.

Las ecuaciones algebraicas son una herramienta común a la hora de resolver problemas en ciencias sociales: economía, sociología, etc. En este tema veremos qué es un **polinomio**, cómo operar con ellos y expresarlos de forma más simplificada y operativa. Por último, repasaremos las igualdades notables.

1.1. Monomios

Definición 1.1.1. Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Ejemplo 1.1.1.

$$M(x, y) = -5x^7 y$$

1.2. Partes de un monomio

Coeficiente: es el número que multiplica a las letras, **-5**.

Parte literal: son las letras que aparezcan en el monomio con los exponentes, $\boldsymbol{x^7 y}$.

Grado: es la suma de los exponentes que tenga el monomio, **8**.

Variable: son cada una de las letras que aparecen en el monomio, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

En este curso de nivelación sólo nos centraremos en polinomios con una sola variable real $\boldsymbol{x}$.

1.3. Polinomios

Definición 1.3.1. Un **polinomio** es la suma o diferencia algebraica de varios monomios. La expresión algebraica general de un polinomio en una variable viene dada por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_0, a_1, ..., a_n son los **coeficientes** del polinomio y pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$, $a_n x^n$ es el **término principal** y n indica el **grado del polinomio**.

Ejemplo 1.3.1.

$$P(x) = 5x^5 + x^2 - x + 9$$

Definición 1.3.2. Dado un número real a y un polinomio $P(x)$, se llama **valor numérico** de $P(x)$ para $x = a$, y se denota por $P(a)$, al número que resulta al sustituir el valor a por x y realizar las operaciones.

Ejemplo 1.3.2. Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = 5x^5 + x^2 - x + 9$ en $x = -2$.

Se sustituye x por -2:

$$P(-2) = 5(-2)^5 + (-2)^2 - (-2) + 9 = 5(-32) + 4 + 2 + 9 = -145$$

1.4. Operaciones con polinomios

- **Suma y diferencia de polinomios**
  La suma o diferencia de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando o restando los términos semejantes (con el mismo exponente), dejando indicada la suma o diferencia de los términos no semejantes.

Ejemplo 1.4.1. Suma y resta los polinomios $P(x) = 5x^7 + x^2 - x + 9$ y $Q(x) = 3x^5 + 4x^2 - 3x - 2$.

$$P(x) + Q(x) = (5x^7 + x^2 - x + 9) + (3x^5 + 4x^2 - 3x - 2) =$$
$$= 5x^7 + x^2 - x + 9 + 3x^5 + 4x^2 - 3x - 2 =$$
$$= 5x^7 + 3x^5 + (1 + 4)x^2 + (-1 - 3)x + (9 - 2) = 5x^7 + 3x^5 + 5x^2 - 4x + 7$$

$$P(x) - Q(x) = (5x^7 + x^2 - x + 9) - (3x^5 + 4x^2 - 3x - 2) =$$
$$= 5x^7 + x^2 - x + 9 - 3x^5 - 4x^2 + 3x + 2 =$$
$$= 5x^7 - 3x^5 + (1 - 4)x^2 + (-1 + 3)x + (9 + 2) = 5x^7 - 3x^5 - 3x^2 + 2x + 11$$

- **Productos de dos polinomios**
  El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando los términos del primero por cada uno de los del segundo y simplificando los términos semejantes.

  Ejemplo 1.4.2. Si $P(x) = 2x^3 - 3x + 5$ y $Q(x) = 4x^2 - 1$, calcula $P(x)Q(x)$.

  $$P(x)Q(x) = (2x^3 - 3x + 5)(4x^2 - 1) =$$
  $$= (2x^3 - 3x + 5)4x^2 + (2x^3 - 3x + 5)(-1) =$$
  $$= 8x^5 - 12x^3 + 20x^2 - 2x^3 + 3x - 5 =$$
  $$= 8x^5 + (-12 - 2)x^3 + 20x^2 + 3x - 5 =$$
  $$= 8x^5 - 14x^3 + 20x^2 + 3x - 5$$

- **División entera de polinomios**
  Para dividir dos polinomios se aplica un proceso análogo al que se utiliza con los números enteros.

  $$D(x) = d(x)C(x) + R(x) \to \frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

  Uno de los objetivos de esta operación es poder expresar un polinomio como producto de monomios y/o polinomios de menor grado, por lo que a efectos prácticos nos interesa más centrarnos en métodos de cálculo más operativos tales como la regla de Ruffini.

- **Regla de Ruffini**
  La regla de Ruffini es un algoritmo que permite obtener el cociente y el resto de la división de la división de un polinomio por un binomio de la forma $(x - a)$

Ejemplo 1.4.3. Ilustramos como funciona la regla de Ruffini:

$$(10x^2 - 5 - 3x^4 + 2x^3) : (x + 2).$$

Para comenzar la operación, se deben seguir los pasos:

- Si el polinomio no es completo, se completa añadiendo los términos que faltan con ceros.
- Colocamos los coeficientes del dividendo ordenados en una línea.

  $(-3x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 0x - 5) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

- El divisor se debe igualar a $0 \to x + 2 = 0 \to$ El $+2$ se cambia por el opuesto -2, que irá colocado abajo a la izquierda.

  $(-3x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 0x - 5) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

- Para empezar se baja el primer coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & & & & \\ \hline & -3 & & & & \end{array}$$

- Se multiplica ese coeficiente por el divisor y se coloca debajo del siguiente término.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & 6 & & & \\ \hline & -3 & & & & \end{array}$$

- Se suman los dos coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & 6 & & & \\ \hline & -3 & 8 & & & \end{array}$$

- Se repite el proceso anterior y se va completando paso a paso la tabla.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & 6 & -16 & & \\ \hline & -3 & 8 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & 6 & -16 & & \\ \hline & -3 & 8 & -6 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & 6 & -16 & 12 & \\ \hline & -3 & 8 & -6 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & 6 & -16 & 12 & \\ \hline & -3 & 8 & -6 & 12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & 6 & -16 & 12 & -24 \\ \hline & -3 & 8 & -6 & 12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & 6 & -16 & 12 & -24 \\ \hline & -3 & 8 & -6 & 12 & -29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 2 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & & 6 & -16 & 12 & -24 \\ \hline & -3 & 8 & -6 & 12 & -29 \end{array}$$

Cociente$= -3x^3 + 8x^2 - 6x + 12$

Resto$= -29$

Se debe tener en cuenta que:

- El grado del cociente es una unidad inferior al dividendo.
- El resto siempre es un número.

La división de polinomios se puede expresar como:

$$\frac{-3x^4 + 2x^3 10x^2 + 0x - 5}{x+2} = -3x^3 + 8x^2 - 6x + 12 + \frac{-29}{x+2}$$

1.5. Igualdades notables

Las igualdades o identidades notables son unas igualdades algebraicas que nos permiten calcular de forma directa determinadas operaciones con polinomios. Las fórmulas de las identidades notables cumplen siempre unas reglas fijas, por lo que el resultado puede darse sin tener que verificar la multiplicación.
Las fórmulas de las igualdades notables que más se utilizan son: el cuadrado de una suma, el cuadrado de una resta y la suma por diferencia.

Si a y b son expresiones algebraicas se cumplen las siguientes identidades notables:

- **Cuadrado de una suma**

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo 1.5.1.

$$(3x+2)^2 = (3x+2)(3x+2) = 9x^2 + 12x + 4$$

.

- **Cuadrado de una resta**

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 1.5.2.

$$(3x-2)^2 = (3x-2)(3x-2) = 9x^2 - 12x + 4$$

.

- **Suma por diferencia**

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 1.5.3.

$$(x^2+4)(x^2-4) = x^4 - 16$$

.

1.6. Factorización de polinomios

Para poder tener una visión más clara de las expresiones polinómicas es aconsejable expresarlas de la manera más simplificada posible, sobre todo después de haber efectuado operaciones algebraicas. Algunas veces es suficiente simplificar el polinomio agrupando los términos semejantes, pero otras veces es necesario expresar el polinomio de grado n en producto de otros polinomios de menor grado.

Raíces de un polinomio

Las **raíces de un polinomio $\mathbf{P(x)}$** son los valores $x = a$ para los que el valor numérico del polinomio es 0, es decir, $x = a$ es raíz de $P(x)$ sí y sólo sí $P(a) = 0$.
Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales. Además si un polinomio tiene todos sus coeficientes enteros, las raíces enteras del polinomio son siempre divisores de su término independiente.

Ejemplo 1.6.1. El polinomio $P(x) = -x^2 + x + 6$ tiene como raíces $x = 3$ y $x = -2$, ya que $P(3) = P(-2) = 0$. Observa que el grado del polinomio es 2 y tiene dos raíces enteras que son divisores de 6.

Ejemplo 1.6.2. El polinomio $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 3$ tiene como raíces $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$, ya que $P(1) = P(\frac{3}{2}) = P(-\frac{1}{2}) = 0$. Observa que el grado del polinomio es 3 y tiene tres raíces, una de ellas, $x = 1$, es divisor del término independiente y raíz entera del polinomio.

Factorización de un polinomio

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de polinomios del grado más pequeño posible. Para factorizar un polinomio conviene aplicar los siguientes procedimientos:

- Extracción de factor común.

  Ejemplo 1.6.3.
  $$P(x) = 3x^4 + 6x^2 = 3x^2(x^2 + 2)$$

.

- Utilización de igualdades notables.

Ejemplo 1.6.4.

$$P(x) = 4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$$

.

- Resolución de ecuaciones de 2º grado para polinomios de 2º grado.

Si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c$, el polinomio $P(x) = ax^2+bx+c$ se descompone de la forma $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Ejemplo 1.6.5.

$$P(x) = 4x^2 - 4x - 3 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{8}$$

.

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}\ ;\ x_2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = 4(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2}) = 2(x - \frac{3}{2})2(x + \frac{1}{2}) = (2x-3)(2x+1)$$

- Utilización de la regla de Ruffini para la obtención de las raíces del polinomio.
Esta regla se utiliza para resolver ecuaciones de tercer grado o mayor, permite obtener soluciones enteras y factorizar polinomios de tercer grado o mayor.

Ejemplo 1.6.6. Para factorizar el polinomio $P(x) = x^3 - 7x + 6$, se busca entre los divisores del término independiente, en este caso ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6, aquellos en los que la división $P(x) : (x-a)$ sea exacta.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$P(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ es raíz $\Rightarrow (x-1)$ es un factor, el cociente es x^2+x-6.

$P(x) = (x-1)(x^2+x-6)$ y para factorizar x^2+x-6 se aplica de nuevo Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$P(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ es raíz $\Rightarrow (x-2)$ es un factor, el cociente es $x+3$.

$$\text{Por lo tanto : } P(x) = (x-1)(x-2)(x+3).$$

- Otros ejemplos.

Ejemplo 1.6.7. Factorizar el polinomio:

$$P(x) = 4x^7 - 13x^5 + 8x^4 + 3x^3 - 2x^2$$

Para factorizar el polinomio $P(x) = 4x^7 - 13x^5 + 8x^4 + 3x^3 - 2x^2$, observamos primero si se puede extraer factor común:

$$P(x) = x^2(4x^5 - 13x^3 + 8x^2 + 3x - 2)$$

Para seguir factorizando el polinomio de 5º grado se aplica la regla de Ruffini. Si uno de los divisores del término independiente es raíz, se debe volver a comprobar dicho divisor, ya que puede ser raíz múltiple.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 4 & 0 & -13 & 8 & 3 & -2 \\ 1 & & 4 & 4 & -9 & -1 & 2 \\ \hline & 4 & 4 & -9 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & & 4 & 8 & -1 & 2 & \\ \hline & 4 & 8 & -1 & 2 & 0 & \\ -2 & & -8 & 0 & -2 & & \\ \hline & 4 & 0 & -1 & 0 & & \end{array} \quad \rightarrow P(x) = x^2(x-1)^2(x+2)(4x^2-1)$$

Para el último polinomio se utilizan las igualdades notables, en este caso suma por diferencia.

$$P(x) = x^2(x-1)^2(x+2)(2x+1)(2x-1)$$

Ejemplo 1.6.8. Factorizar el polinomio:

$$P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

Para factorizar el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ observamos primero que no se puede extraer factor común, y como es de 3^{er} grado, se aplica la regla de Ruffini para extraer la raíces.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Para factorizar el cociente $x^2 + x + 1$, resultante de aplicar Ruffini, se utiliza la ecuación de segundo grado.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

Al no tener soluciones reales, el cociente es irreducible.

$$P(x) = (x-2)(x^2 + x + 1)$$