Tema 1

Ejercicios con polinomios

M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.

1.1. Operaciones con polinomios

Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

Ejercicio 1.1.1. $(3x^2+2x-5)(2x^2+x-3)$.

Solución:

$$(3x^2+2x-5)(2x^2+x-3) = (3x^2+2x-5)(2x^2)+(3x^2+2x-5)(x)+(3x^2+2x-5)(-3) =$$

$$= (6x^4+4x^3-10x^2)+(3x^3+2x^2-5x)+(-9x^2-6x+15) =$$

$$= 6x^4+(4+3)x^3+(-10+2-9)x^2)+(-5-6)x+15 =$$

$$= 6x^4+7x^3-17x^2-11x+15$$

Ejercicio 1.1.2. $4(x^3-x+3)-2(x^2+3x)(-2x+5)$

Solución:

Observamos que hay que realizar varias operaciones polinómicas. El orden de aplicación es: 1º producto, 2º suma o resta.

$$4(x^3-x+3)-2(x^2+3x)(-2x+5) = (4x^3-4x+12)+((-2x^2-6x)(-2x+5)) =$$

$$= (4x^3-4x+12)+((-2x^2-6x)(-2x)+(-2x^2-6x)(5)) =$$

$$= (4x^3-4x+12)+((4x^3+12x^2)+(-10x^2-30x)) =$$

$$= (4x^3-4x+12)+(4x^3+(12-10)x^2-30x) = (4x^3-4x+12)+(4x^3+2x^2-30x) =$$

$$= (4+4)x^3+2x^2+(-4-30)x+12 = 8x^3+2x^2-34x+12$$

Ejercicio 1.1.3. $(2x-3)(-2x^2+2)+x(-2x^2+x+1)$

Solución:

$$(2x-3)(-2x^2+2)+x(-2x^2+x+1) = (2x)(-2x^2+2)+(-3)(-2x^2+2)+(-2x^3+x^2+x) =$$
$$= (-4x^3+4x)+(6x^2-6)+(-2x^3+x^2+x) = (-4-2)x^3+(6+1)x^2+(4+1)x-6 =$$
$$= -6x^3+7x^2+5x-6$$

Ejercicio 1.1.4. Calcula los valores de a y b para que se verifique la siguiente igualdad $(3x^2-5x+a)(2x^2+bx) = 6x^4-19x^3+19x^2-6x$

Solución:

Se comienza realizando el producto de polinomios a la izquierda de la igualdad.

$$(3x^2-5x+a)(2x^2+bx) = (3x^2-5x+a)(2x^2)+(3x^2-5x+a)(bx) =$$
$$= (6x^4-10x^3+2ax^2)+(3bx^3-5bx^2+abx) =$$
$$= 6x^4+(-10+3b)x^3+(2a-5b)x^2+abx$$

Por comparación con el polinomio dado, $6x^4-19x^3+19x^2-6x$.

$$6x^4+(-10+3b)x^3+(2a-5b)x^2+abx = 6x^4-19x^3+19x^2-6x$$

Se igualan los coeficientes de los términos de igual potencia:

- $x^4 \to 6 = 6$
- $x^3 \to (-10+3b) = -19 \to 3b = -19+10 \to b = \frac{-9}{3} \to b = -3$
- $x^2 \to (2a-5b) = 19 \to 2a-5(\mathbf{-3}) = 19 \to\to 2a+15 = 19 \to$ $2a = 19-15 \to a = \frac{4}{2} \to a = 2$
- $x \to ab = -6$, se comprueba que los resultados obtenidos verifican esta igualdad: $x \to 2(-3) = -6$

Luego la solución es: $a = 2$ y $b = -3$

1.2. Regla de Ruffini

Ejercicio 1.2.1. Calcular la siguiente división aplicando la regla de Ruffini:

$$(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (2x + 3)$$

Solución:

El divisor no es de la forma $(x - a)$, por lo que para poder aplicar la regla de Ruffini se divide el dividendo y el divisor entre 2:

$$(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (2x + 3) \to \tfrac{1}{2}(x^3 - 3x^2 - x + 6) : \tfrac{1}{2}(2x + 3) \to$$
$$\to (\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3) : (x + \frac{3}{2})$$

Se aplica la regla:

$$\begin{array}{r|rrrr} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & & -\frac{3}{4} & \frac{18}{8} & -\frac{30}{16} \\ \hline & \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{10}{8} & \frac{9}{8} \end{array}$$

Podemos expresar:

$$(x^3-3x^2-x+6) : (2x+3) = (\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3) : (x+\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{5}{4}+\frac{\frac{9}{8}}{2x+3}$$

Ejercicio 1.2.2. Calcular la siguiente división aplicando la regla de Ruffini:

$$(4x^4 - 3x^2 + 5) : (-x + 5)$$

Solución:

El divisor no es de la forma $(x - a)$, por lo que para poder aplicar la regla de Ruffini se divide el dividendo y el divisor entre (-1):

$$(4x^4 - 3x^2 + 5) : (-x + 5) \to (-1)(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (-1)(-x + 5) \to$$
$$\to (-4x^4 + 3x^2 + x - 6) : (x - 5)$$

Se aplica la regla:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -4 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 5 & & -20 & -100 & -485 & -2455 \\ \hline & -4 & -20 & -97 & -491 & -2501 \end{array}$$

Podemos expresar:

$$(4x^4-3x^2+5) : (-x+5) = (-4x^4+3x^2+x-6) : (x-5) = 4x^3-20x^2-97x-491-\frac{2501}{-x+5}$$

1.3. Igualdades notables

Ejercicio 1.3.1. Simplifica la siguiente expresión polinómica:

$$(3x+2)^2 + 2(2x-3)^2 - (2x-5)(x-5)$$

Solución:

Observamos que hay que realizar varias operaciones polinómicas. El orden de aplicación es: 1º producto y/o desarrollo de igualdades notables en cada sumando, 2º suma o resta de coeficientes con términos de igual grado.

$$\begin{gathered}(3x+2)^2 + 2(2x-3)^2 - (2x-5)(x-5) = \\ = (9x^2+12x+4) + 2(4x^2-12x+9) - ((2x-5)(x) + (2x-5)(-5)) \\ = (9x^2+12x+4) + (8x^2-24x+18) - ((2x^2-5x) + (-10x+25)) = \\ = (9x^2+12x+4) + (8x^2-24x+18) + (-2x^2+5x) + (10x-25) = \\ = (9+8-2)x^2 + (12-24+5+10)x + (4+18-25) = \\ = 15x^2+3x-3\end{gathered}$$

Ejercicio 1.3.2. Calcula los valores de a y b para que se verifique la siguiente igualdad

$$2(x+3)^2 - 3(x+a) = 2x^2+bx+3$$

Solución:

Se comienza realizando el producto de polinomios a la izquierda de la igualdad.

$$\begin{gathered}2(x+3)^2 - 3(x+a) = 2(x^2+6x+9) - (3x+3a) = \\ = (2x^2+12x+18) - (3x+3a) = 2x^2 + (12-3)x + (18-3a) = \\ = 2x^2+9x+(18-3a)\end{gathered}$$

Por comparación con el polinomio dado, $2x^2+bx+3$.

$$2x^2+9x+(18-3a) = 2x^2+bx+3$$

Se igualan los coeficientes de los términos de igual potencia:

- $x^2 \to 2 = 2$
- $x \to 9 = b$
- x^0 (término independiente) $\to -3a = 3-18 \to a = \frac{-15}{-3} \to a = 5$

1.4. Ecuaciones polinómicas básicas

M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.

En este apartado se resolverán algunos modelos de ecuaciones polinómicas básicas que se estudiaron durante Secundaria y Bachillerato. Los ejemplos expuestos servirán para recordar que hay que realizar un repaso concienzudo de los conceptos, propiedades y operaciones que aquí se utilizan (operaciones con fracciones, logaritmos, exponenciales, ...), pues durante todo el proceso de estudio universitario se deben manejar con mucha soltura. La incógnita puede ser cualquier elemento de la ecuación y, dependiendo de la posición donde se encuentre, procederemos a despejarla utilizando las operaciones matemáticas más adecuada.

Ejercicio 1.4.1. Resuelve la ecuación polinómica:

$$2x - 2(3x-1) + 4(2x-5) - 10 = 8x$$

Solución:

$$2x - 2(3x-1) + 4(2x-5) - 10 = 8x \to 2x + (-6x+2) + (8x-20) - 10 = 8x$$

$$(2-6+8)x + (2-20-10) = 8x \to 4x - 28 = 8x \to 4x - 8x = 28$$

$$-4x = 28 \to x = \frac{28}{-4} = -7 \to x = -7$$

Ejercicio 1.4.2. Resuelve la ecuación polinómica:

$$\frac{x+10}{2} + \frac{2(x-2)}{5} = \frac{5x-15}{3}$$

Solución:

Como aparecen fracciones, en primer lugar se debe sacar m.c.m., en este ejercicio: $m.c.m. = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$

$$\frac{x+10}{2} + \frac{2(x-2)}{5} = \frac{5x-15}{3} \to \frac{15(x+10)}{30} + \frac{6 \cdot 2(x-2)}{30} = \frac{10(5x-15)}{30}$$

Se pueden quitar los denominadores y se efectúan los productos de cada sumando.

$$(15x+150) + (12x-24) = (50x-150) \to (15+12)x + (150-24) = 50x - 150$$

$$27x - 50x = -150 - 126 \to -23x = -276 \to x = \frac{-276}{-23} = 12 \to x = 12$$

Ejercicio 1.4.3. Resuelve la ecuación polinómica:

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=3$$

Solución: m.c.m. $= x\cdot(x+2)$

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=3\rightarrow\frac{4(x+2)}{x(x+2)}+\frac{4x}{x(x+2)}=\frac{3x(x+2)}{x(x+2)}$$

Se pueden quitar los denominadores y se efectúa los productos de cada sumando.

$$(4x+8)+(4x)=(x^2+2x)\rightarrow(4+4)x+8=x^2+2x\rightarrow 8x+8=x^2+2x$$

$$x^2+2x-8x-8=0\rightarrow x^2-6x-8=0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$x^2-6x-8=0\rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{1+32}}{2}$$

$$\rightarrow x_1=\frac{6-\sqrt{33}}{2}\ ;\ x_2=\frac{6+\sqrt{33}}{2}$$

Ejercicio 1.4.4. Resuelve la ecuación polinómica:

$$2=3(7x-3)^5$$

Solución:

$$32=243(7x-3)^5\rightarrow\frac{32}{243}=(7x-3)^5\rightarrow\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\sqrt[5]{(7x-3)^5}$$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=(7x-3)\rightarrow\frac{2}{3}=7x-3\rightarrow\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{7}=x\rightarrow x=\frac{11}{21}$$

Ejercicio 1.4.5. Resuelve la ecuación polinómica:

$$2=3\cdot 5^x$$

Solución:

$$2=3\cdot 5^x\rightarrow\frac{2}{3}=5^x\rightarrow Ln(\frac{2}{3})=Ln(5^x)\rightarrow Ln(2)-Ln(3)=xLn(5)$$

$$\frac{Ln(2)-Ln(3)}{Ln(5)}=x\rightarrow\frac{0,6931-1,0986}{1,6094}=x\rightarrow x=-0,2519$$

1.5. Resolución de Ecuaciones Polinómicas en Contexto Financiero

M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.

En este apartado veremos que una fórmula financiera no es más que una ecuación polinómica que se podrá resolver utilizando las técnicas matemáticas que se han aprendido durante el bachillerato. Centraremos los ejemplos en la fórmula de la capitalización compuesta.

- **Conceptos previos**

Ley de capitalización compuesta:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

- C_n = Capital final.
- C_0 = Capital inicial.
- i = Tipo de interés.
- n = Número de periodos.

La incógnita puede ser cualquier elemento de la ecuación por lo que se procederá a despejarla utilizando el procedimiento matemático más adecuado.

- **Cálculo del capital final**
  En la ley de capitalización compuesta la incógnita es C_n.

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Este cálculo solo requiere la sustitución de los valores numéricos en la ecuación de capitalización compuesta.

Ejercicio 1.5.1. Calcular el capital final obtenido en un depósito de 6000 € colocados 2 años al 8 % de interés efectivo anual.

Solución:

$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow C_n = 6000(1+0,08)^2 \Rightarrow C_n = 6998,4$ €

- **Cálculo del capital inicial**
  En la ley de capitalización compuesta la incógnita es C_0.

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Ejercicio 1.5.2. Calcular el capital inicial al que imponer durante 3 años al 6,75 % de interés efectivo anual, para que se pueda obtener un capital final de 7299 €.

Solución:

$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow 7299 = C_0(1+0,0675)^3 \Rightarrow 7299 = C_0(1,0675)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7299 = C_0(1,2165) \Rightarrow \frac{7299}{1,2165} = C_0 \Rightarrow C_0 = 6000$ €

- **Cálculo del interés**
  En la ley de capitalización compuesta la incognita es i.

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Ejercicio 1.5.3. Un capital de 30050 €, se impuso en un depósito a plazo fijo a 4 años, siendo el capital final de 36875 €, si se ha pactado un régimen de capitalización compuesto, ¿cuál es el tipo de interés efectivo anual de la imposición? *Solución:*

Planteamos primero la ecuación $36875 = 30050(1+i)^4$, y despejamos i:

$(1+i)^4 = \frac{36875}{30050} = 1,2271$, para despejar la i se toma $\sqrt[4]{\ }$ a ambos lados de la ecuación:

$\sqrt[4]{(1+i)^4} = \sqrt[4]{1,2271} \Rightarrow (1+i) = 1,0525 \Rightarrow i = 1,0525-1 \Rightarrow i = 0,0525 \Rightarrow 5,25\,\%$

- **Cálculo del número de periodos**
  En la ley de capitalización compuesta la incognita es n.

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Ejercicio 1.5.4. Un capital de 30050 €, se impuso en un depósito a plazo fijo a 4 años, si se ha pactado un régimen de capitalización compuesto al 5,25 % anual, ¿cuánto tiempo sería necesario mantener un depósito para obtener un capital final de 38811?
Solución:

Planteamos primero la ecuación $38811 = 30050(1 + 0,0525)^n$, y despejamos n:

$(1 + 0,0525)^n = \frac{38811}{30050} = 1,2915$, para despejar la i se toma Ln a ambos lados de la ecuación:

$$Ln(1,0525)^n = Ln(1,2915) \Rightarrow nLn(1,0525) = Ln(1,2915) \Rightarrow n = \frac{Ln(1,2915)}{Ln(1,0525)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow n = \frac{0,2558}{0,0512} \Rightarrow n = 5$ años.