# Tema 2

# Funciones polinómicas

*M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.*

En este capítulo, se tratarán algunas características de funciones polinómicas. En primer lugar, se describirán cómo obtener las raíces de funciones polinómicas. En una segunda sección, se tratará los límites y la continuidad de funciones polinómicas, además de las funciones por partes y por último, se tratará la obtención de la función inversa de una función polinómica.

## 2.1. Raíces de funciones polinómicas

**Definición 2.1.1.** Se dice que un valor $x = a$ es raíz de un polinomio $P(x)$, cuando al sustituir dicho valor en el polinomio, el resultado es 0; es decir, cuando $P(a) = 0$. Las raíces de un polinomio, también se llaman ceros del polinomio.

**Ejemplo 2.1.1.** Sea $P(x) = x^2 + 3x - 4$, 1 es una raíz del polinomio, ya que: $P(1) = 1 + 3 \cdot 1 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$.

**Observaciones:**

- El número de raíces reales que puede tener un polinomio es menor o igual que el grado del polinomio.
- Un polinomio cuyo término independiente sea 0, es decir, no aparece término independiente, siempre admite como raíz $x = 0$. Como se trata de una expresión en la que todos los términos contienen el factor $x$, al sustituir ésta por 0, se anulan todos y el resultado es 0.

## 2.2. Métodos para el cálculo de las raíces de un polinomio

Veremos 5 posibles casos que nos podríamos encontrar a la hora de calcular las raíces de un polinomio.

1. Si es de **Grado 1**:

Bastará con despejar la incógnita, x.

**Ejemplo 2.2.1.** Calcula las raíces del polinomio $P(x) = 2x + 3$.

$$2x + 3 = 0 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \Rightarrow \text{Raíz única}$$

2. Si es de **Grado 2**:

Se resolverá la ecuación de segundo grado resultante.

**Ejemplo 2.2.2.** Calcula las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x + 3$.

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} x_1 = \frac{-5-1}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \\ x_2 = \frac{-5+1}{4} = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{ Dos raíces.}$$

3. Si es **Bicuadrada**:

Se trata de un polinomio de grado 4 incompleto, con sólo los términos de los grados 4, 2 y 0. Es decir, tiene la forma: $ax^4 + bx^2 + c$. Este polinomio se puede transformar en una de segundo grado mediante el cambio de $y = x^2$. Resolveremos la ecuación de $2^o$ grado resultante y desharemos el cambio para encontrar las soluciones de la variable inicial.

**Ejemplo 2.2.3.** Calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0, \text{ hacemos el cambio } y = x^2, \text{ así:}$$

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{(13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} =$$

$$= \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{13-5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ y_2 = \dfrac{13+5}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 \end{cases}$$

Buscamos ahora los valores que corresponden a la variable original para cada una de las soluciones obtenidas.

$$\begin{cases} y_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ y_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{ Cuatro raíces.}$$

**Ejemplo 2.2.4.** Calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 14x^2 - 32$.

$$x^4 + 14x^2 - 32 = 0, \text{ hacemos el cambio } y = x^2, \text{ así:}$$

$$y^2 + 14y - 32 = 0$$

$$y = \frac{-14 \pm \sqrt{(14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 128}}{2} =$$

$$= \frac{-14 \pm 18}{2} = \begin{cases} y_1 = \dfrac{-14-18}{2} = \dfrac{-32}{2} = -16 \\ y_2 = \dfrac{-14+18}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Buscamos ahora los valores que corresponden a la variable original para cada una de las soluciones obtenidas:

$$y_1 = -16 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-16}$$

que no es un número real.

$$y_2 = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \text{Dos raíces.}$$

4. Si es de **Grado mayor que 2**, no bicuadrada:

En este caso, la *regla de Ruffini* será útil para encontrar las *raíces enteras* del polinomio. Las posibles raíces las buscaremos entre los divisores del término independiente. Iremos probando cada uno de ellos para ver si el resto da 0, en cuyo caso, se tratará de una raíz. El número candidato a raíz es el que colocaremos a la izquierda al aplicar Ruffini.

**Ejemplo 2.2.5.** Calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

Apliquemos el método de Ruffini. Las posibles raíces enteras estarán entre los divisores del término independiente 6, que son: $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$ y $\pm 6$.

Empezamos a comprobar:

- Con el 1:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 4 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} \neq 0 \Rightarrow \text{ No es raíz.}$$

- Con el -1:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} = 0 \Rightarrow \text{ Es raíz.}$$

- Con el 2:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} = 0 \Rightarrow \text{ Es raíz.}$$

- Con el 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} = 0 \Rightarrow \text{ Es raíz.}$$

Ya no es necesario seguir probando con el resto de los divisores, ya que, un polinomio tiene tantas raíces reales como indica su grado. Como es de grado 3 y hemos encontrado 3 raíces, ya no puede haber más. Por tanto, las raíces de este polinomio son: $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

5. Si tenemos un **producto de varios polinomios**:

No es necesario realizar el producto de ellos para ver el polinomio final del que se trata y calcular después sus raíces. Sólo hay que tener en cuenta lo siguiente: *para que un producto sea 0, alguno de los factores debe ser cero.* Esto significa que igualando cada uno de los factores a cero, encontraremos todas las raíces.

**Ejemplo 2.2.6.**

$$P(x) = (x-3)(x+4)x$$

$$(x-3)(x+4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x=0 \end{cases}$$

Las raíces son: $x = 3, x = -4, x = 0$.

## 2.3. Límites de funciones. Continuidad

**Definición 2.3.1.** Si $f(x)$ es una función definida a la izquierda y a la derecha de un punto $c$. Si existen los **límites laterales** y coinciden:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = l$$

entonces decimos que el **límite de $\boldsymbol{f(x)}$** existe y es igual a $l$ : $\lim_{x\to c} f(x) = l$

**Definición 2.3.2.** Decimos que $f$ es **continua** en $c$ si $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Si $f(x)$ es continua en $c$, se cumplen las tres condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe y es finito.
- $f(x)$ está definida en $c$. Es decir, existe $f(c)$.
- El límite de $f(x)$ en $c$ coincide con el valor de $f(c)$.

**Observación:** Si $f(x)$ es una función continua y está definida en el punto $x = c$, entonces para hallar $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ calcularemos, sencillamente $f(c)$.

**Ejemplo 2.3.1.** $\lim\limits_{x \to 4} (x+1)^2 = 5^2 = 25$.

## 2.4. Función discontinua

Una función puede dejar de ser continua en un punto por no cumplir alguna de las siguientes condiciones:

- $f(x)$ no está definida en $c$.

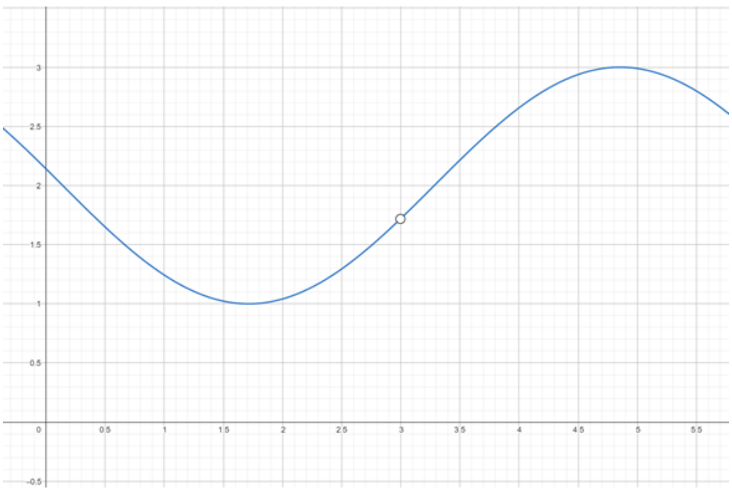

Figura 2.1: $f(x)$ no está definida en $c$

- $f(x)$ no tiene límite en $c$, por no existir alguno de los límites laterales o por ser distintos.

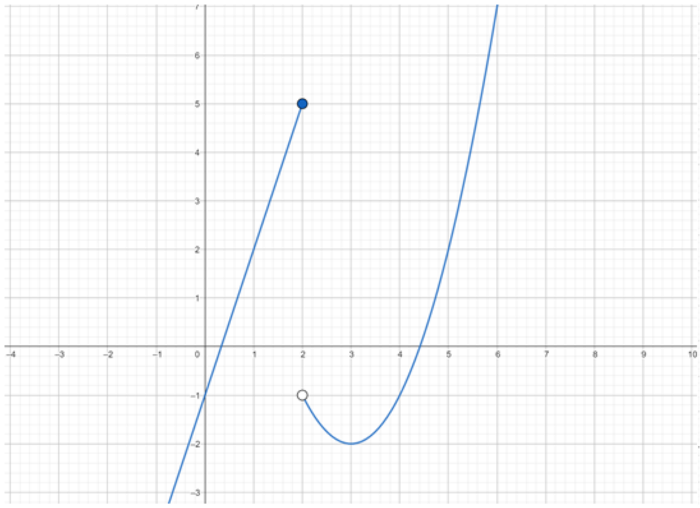

Figura 2.2: $f(x)$ no tiene límite en $c$

- $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c)$. Existen los límites laterales, pero no coinciden con el valor de la función en $c$.

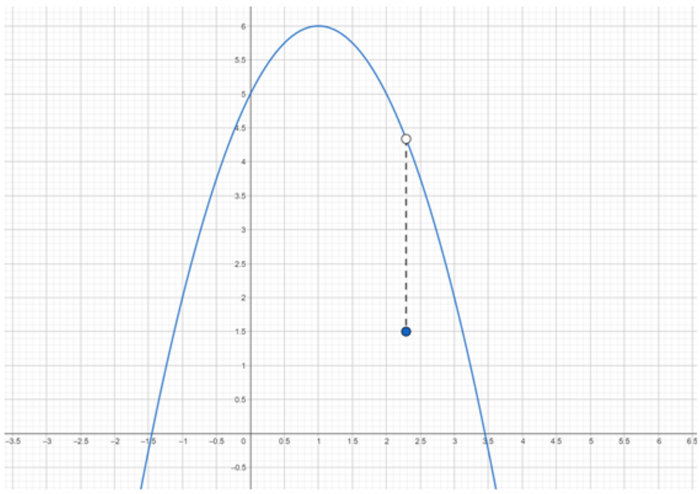

Figura 2.3: Existe el límite de $f(x)$, pero $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

**Definición 2.4.1.** Cuando una función es discontinua en $c$, pero existe el límite en dicho punto, se dice que la **discontinuidad es evitable** (ver ejemplo 2.3).

**Definición 2.4.2.** Una función se dice que es **continua en un intervalo** (finito o infinito) de $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto del intervalo.

## 2.5. Funciones definidas a trozos

Las funciones definidas a trozos presentan discontinuidades en los puntos de empalme, salvo que en ellos los límites laterales coincidan. Es decir, salvo que:

$$f_1(a) = f_2(a)$$

siendo $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \leq a \\ f_2(x), x > a \end{cases}$

**Continuidad en el punto de ruptura:**

Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x < c \\ f_2(x), x > c \end{cases}$, donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones continuas.

Si $f_1(x)$ es continua en c, existe $\lim\limits_{x\to c} f_1(x) = f_1(c)$, y por tanto, $\lim\limits_{x\to c^-} f_1(x) = f_1(c)$.

Análogamente, existe $\lim\limits_{x\to c} f_2(x) = f_2(c)$ y, por tanto, $\lim\limits_{x\to c^+} f_2(x) = f_2(c)$.

Por consiguiente, si $f_1(c) = f_2(c)$, el límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe y es ese valor.

En tal caso, si la función estuviera definida en $x = c$ (bien porque $f_1$ esté definida para $x \leq c$ o bien $f_2$ para $x \geq c$), entonces $f(x)$ sería continua en $c$.

En caso contrario, si $f_1(c) \neq f_2(c)$, entonces no existe el límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ y la función no sería continua en $c$.

**Ejemplo 2.5.1.** Calcular, si existe, $\lim_{x\to 1} f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} x+1, x < 1 \\ -x^2+4x-1, x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x^2+4x-1) = \lim_{x\to 1}(-x^2+4x-1) = -1+4-1 = 2$$

Como los límites laterales coinciden, existe el $\lim_{x\to 1} f(x)$ y es igual a 2.

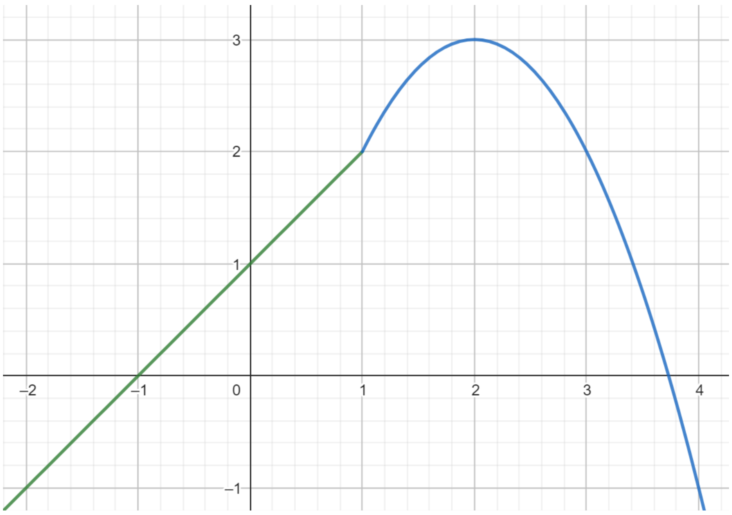


Figura 2.4: $f(x)$ del ejemplo 2.5.1. $f_1(x)$ en verde y $f_2(x)$ en azul.

## 2.6. Función inversa

**Definición 2.6.1.** Se dice que una función $g$ es la **inversa** de $f$ si se cumple que si $f(x) = y$, entonces $g(y) = x$. En caso de ser así, la función inversa de $f$ se denota por $f^{-1}$y, en particular, si $y = f(x)$, entonces se escribe $x = f^{-1}(y)$.

Podemos observar que:

- El dominio de $f^{-1}(x)$ es el recorrido de $f(x)$.
- El recorrido de $f^{-1}(x)$ es el dominio de $f(x)$.

- Si queremos hallar el recorrido de una función tenemos que hallar el dominio de su función inversa.
- Para que una función tenga inversa debe de ser **biyectiva**, es decir, para cada elemento de la imagen tan sólo le correponde un elemento del dominio.
- La función inversa de la función $f(x) = x$ es, evidentemente, ella misma. A esta función se la denomina **identidad**.
- Las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

**Ejemplo 2.6.1.** Sea $f(x) = x + 4$. Entonces se tiene que $f^{-1}(x) = x - 4$.

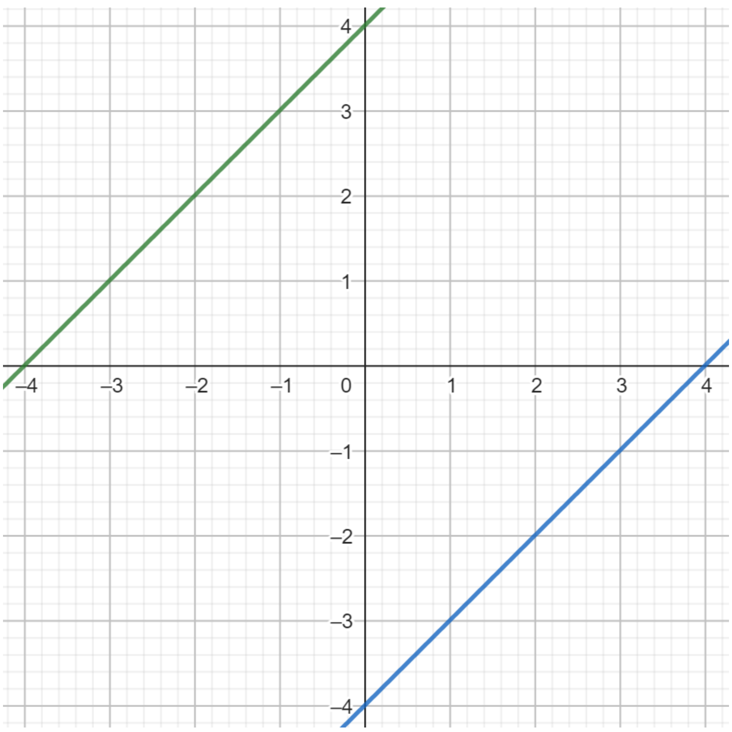


Figura 2.5: $f(x)$ (verde) y $f^{-1}(x)$ (azul) del ejemplo 2.6.1

**Ejemplo 2.6.2.** La función inversa de $f(x) = x^2$ es $g(x) = +\sqrt{x}$.

- Al poner el signo positivo quiere indicarse que solamente se considera la raíz positiva, ya que la función g no puede tener dos valores para la misma x.
- De la misma manera, el dominio de la función $f(x)$ son los reales no negativos, ya que para que tenga inversa, la función original ha de ser biyectiva.

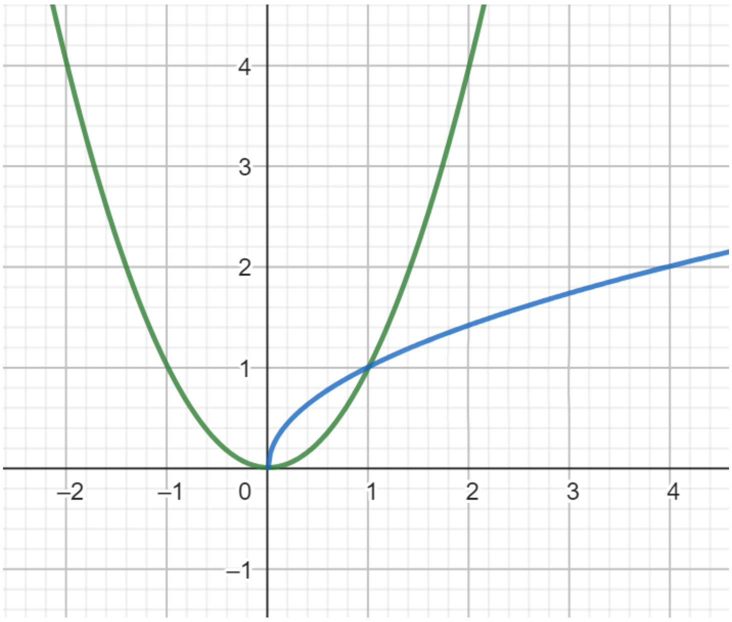


Figura 2.6: $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ del ejemplo 2.6.2

**Cálculo de la función inversa:**

Para calcular la función inversa de una función polinómica, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se escribe la función con $x$ e $y$.
2. Se despeja la variable $x$ en función de la variable $y$.
3. Se intercambian las variables, cambiando el nombre de la función.

**Ejemplo 2.6.3.** Sea $f(x) = x^3 + 1$. Calculemos su función inversa:

1. Cambiamos $f(x)$ por $y$:

$$y = x^3 + 1$$

2. Despejamos $x$:

$$x^3 = y - 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$$

3. Intercambiamos las variables y cambiamos $x$ por $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

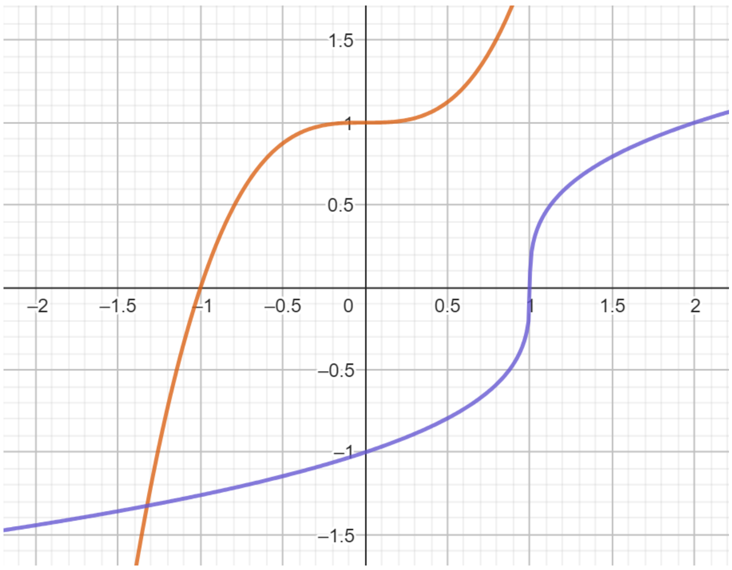


Figura 2.7: $f(x)$ (en rojo) y $f^{-1}(x)$ (en azul) del ejemplo 2.6.3