Tema 2

Ejercicios resueltos de Funciones Polinómicas

M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.

2.1. Raíces de funciones polinómicas

Ejercicio 2.1.1. Calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

Solución:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \\ x_2 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Dos raíces.}$$

Ejercicio 2.1.2. Calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

Solución:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0, \text{ hacemos el cambio } y = x^2, \text{ así:}$$

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2}$$

$$y = \frac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{10-8}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \\ y_2 = \dfrac{10+8}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 \end{cases}$$

Buscamos ahora los valores que corresponden a la variable original para cada una de las soluciones obtenidas.

$$\begin{cases} y_1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ \\ y_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{ Cuatro raíces.}$$

Ejercicio 2.1.3. Calcula las raíces del polinomio $P(x) = 2x^4 + 28x^2 - 64$.

Solución:

$$2x^4 + 28x^2 - 64 = 0, \text{ hacemos el cambio } y = x^2, \text{ así:}$$

$$2y^2 + 28y - 64 = 0$$

$$y = \frac{-28 \pm \sqrt{(28)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-64)}}{2 \cdot 2} = \frac{-28 \pm \sqrt{784 + 512}}{4} = \frac{-28 \pm \sqrt{1296}}{4}$$

$$y = \frac{-28 \pm 36}{4} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-28-36}{4} = \dfrac{-64}{4} = -16 \\ \\ y_2 = \dfrac{-28+36}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

Buscamos ahora los valores que corresponden a la variable original para cada una de las soluciones obtenidas:

$$y_1 = -16 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-16}$$

que no es un número real.

$$y_2 = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \text{Dos raíces.}$$

Ejercicio 2.1.4. Calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

Solución:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

Apliquemos el método de Ruffini. Las posibles raíces enteras estarán entre los divisores del término independiente -12, que son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 y ± 12.

Empezamos a comprobar:

- Con el 1:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline & 1 & 4 & 0 & -12 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} \neq 0 \Rightarrow \text{ No es raíz.}$$

- Con el -1:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -6 & -6 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} \neq 0 \Rightarrow \text{ No es raíz.}$$

- Con el 2:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & 0 & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} = 0 \Rightarrow \text{ Es raíz.}$$

- Con el -2:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -2 & 0 & -2 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} = 0 \Rightarrow \text{ Es raíz.}$$

- Con el 3:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 3 & 0 & 3 & 18 & 42 \\ \hline & 1 & 6 & 14 & 30 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} \neq 0 \Rightarrow \text{ No es raíz.}$$

- Con el -3:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -3 & 0 & -3 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} = 0 \Rightarrow \text{ Es raíz.}$$

Ya no es necesario seguir probando con el resto de los divisores, ya que, un polinomio tiene tantas raíces reales como indica su grado. Como es de grado 3 y hemos encontrado 3 raíces, ya no puede haber más. Por tanto, las raíces de este polinomio son: $x = 2$, $x = -2$ y $x = -3$.

Ejercicio 2.1.5. Calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Solución:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Apliquemos el método de Ruffini. Las posibles raíces enteras estarán entre los divisores del término independiente 1, que son: ± 1.

Empezamos a comprobar:

- Con el 1:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 6 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} \neq 0 \Rightarrow \text{ No es raíz.}$$

- Con el -1:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{Resto} = 0 \Rightarrow \text{ Es raíz.}$$

Ya no podemos seguir probando, porque no hay más posibles divisores del término independiente. Por lo que este polinomio solo tiene una raíz entera $x = -1$. Podríamos expresar el polinomio en forma factorial de la siguiente manera:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Se puede comprobar que la ecuación de segundo grado que queda al factorizar el polinomio $(x^2 + x + 1)$, no tiene solución entera.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

No hay solución porque $\sqrt{-3}$ no es un número real.

2.2. Límites de funciones. Continuidad

Ejercicio 2.2.1. Calcular, si existe, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$:

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4, x < -1 \\ 4x - 1, x \geq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x^3 - 4) = \lim_{x \to -1} (x^3 - 4) = -1 - 4 = -5$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (4x - 1) = \lim_{x \to -1} (4x - 1) = -4 - 1 = -5$$

Como los límites laterales coinciden, existe el $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ y es igual a -5. En este caso se trata de una función continua, ya que existe el $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ y es igual a $f(-1) = 4(-1) - 1 = -5$.

Ejercicio 2.2.2. Calcular, si existe, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, x < 1 \\ 4 - x, x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 3) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 3) = 1 + 3 = 4$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x) = \lim_{x \to 1} (4 - x) = 4 - 1 = 3$$

Como los límites laterales no coinciden, no existe el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. En este caso sería una función discontinua.

2.3. Función inversa

Ejercicio 2.3.1. Sea $f(x) = 2x + 1$. Calculemos su función inversa:

Solución:
1. Cambiamos $f(x)$ por y:

$$y = 2x + 1$$

2. Despejamos x:

$$x = \frac{y-1}{2}$$

3. Intercambiamos las variables y cambiamos x por $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

Ejercicio 2.3.2. Sea $f(x) = \frac{2x-3}{4}$. Calculemos su función inversa:

Solución:
1. Cambiamos $f(x)$ por y:

$$y = \frac{2x-3}{4}$$

2. Despejamos x:

$$x = \frac{4y+3}{2}$$

3. Intercambiamos las variables y cambiamos x por $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2}$$

Ejercicio 2.3.3. Sea $f(x) = x^4 + 2$. Calculemos su función inversa:

Solución:
1. Cambiamos $f(x)$ por y:

$$y = x^4 + 2$$

2. Despejamos x:

$$x^4 = y + 2 \rightarrow x = \sqrt[4]{y+2}$$

3. Intercambiamos las variables y cambiamos x por $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x+2}$$