# Tema 3

# Derivadas polinómicas

*M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.*

La **derivada** de una función $f(x)$ se denota como $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ o más comúnmente como $f'(x)$. En este tema veremos qué es la derivada de una función, cómo se calcula y algunas de sus aplicaciones. Nos centraremos en funciones polinómicas reales de variable real, siendo las más sencillas de calcular e interpretar.

## 3.1. Conceptos previos

**Función polinómica:** Es una función real de variable real cuya expresión general tiene la siguiente forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ son los coeficientes del polinomio y pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. $a_n x^n$ es el término principal y $n$ indica el grado de la función polinómica.

**Raíz de un polinomio:** Es cualquier valor real $\hat{x}$ tal que:

$$f(\hat{x}) = a_n \hat{x}^n + a_{n-1}\hat{x}^{n-1} + \cdots + a_1 \hat{x} + a_0 = 0$$

donde $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ son los coeficientes del polinomio de grado $n$ y pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$.

**Tasa de variación media:** Se llama creciemiento medio o tasa de variación media (TVM) de $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ a la pendiente del segmento $(s)$ que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (ver figura 3.1), esto es:

$$TVM = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

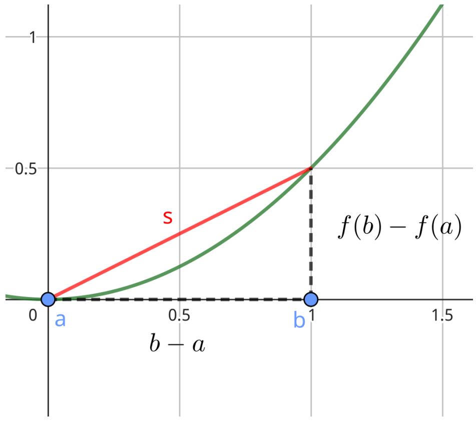



Figura 3.1: Tasa de variación media

## 3.2. Crecimiento y derivada

**Definición 3.2.1.** El **crecimiento** de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ en el que pasa del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ se mide mediante la pendiente de la recta que corta a la curva en esos puntos.

El crecimiento de una función en un punto se mide mediante la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto (ver figura 3.2). Si la pendiente de la recta es positiva, se dice que la función es creciente en ese punto. Si la pendiente de la recta en ese punto es negativa, se dice que la función decrece en ese punto. Si la pendiente de la recta en ese punto es igual a cero, se dice que la función ni crece ni decrece en ese punto. Ver ejemplo 3.2.2.

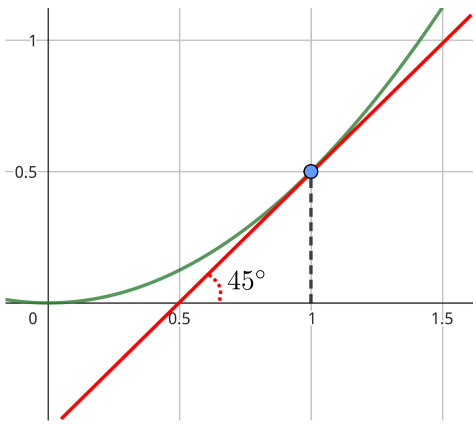



Figura 3.2: Pendiente de la recta en un punto

**Ejemplo 3.2.1.** Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$. La pendiente de la recta en el punto $(1, f(1)) = (1, 0{,}5)$ es igual a 1. La pendiente puede calcularse como la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de ordenadas, es decir, la $tg\ 45° = 1$.

**Definición 3.2.2.** Se llama **derivada** de una función $f(x)$ en punto $x_0$ a la pendiente de la recta tangente en ese punto. Se denota como $f'(x_0)$.

**Proposición 3.2.1.** Una función $f(x)$ es creciente en $x_0$ si y solo si:

$$f'(x_0) > 0$$

**Proposición 3.2.2.** Una función $f(x)$ es decreciente en $x_0$ si y solo si:

$$f'(x_0) < 0$$

**Ejemplo 3.2.2.** Sea la función $f(x) = x^2$. La derivada de la función en los puntos $A$, $B$ y $C$ son respectivamente: $f'(-1) = -2$, $f'(0) = 0$ y $f'(1) = 2$. Por lo tanto la función **decrece** en el punto $A$, **ni crece ni decrece** en el punto $B$ y **crece** en el punto $C$.

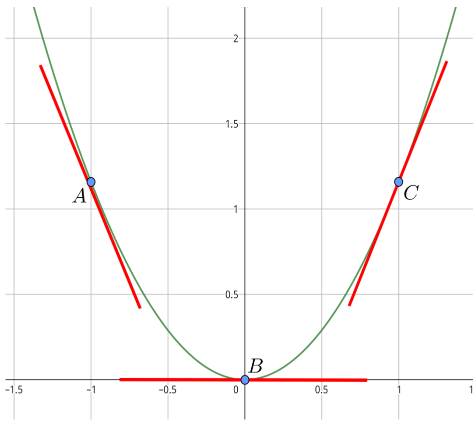



Figura 3.3: Crecimiento y decrecimiento de una función

**Definición 3.2.3.** Se llama **función derivada** de $f$ (o simplemente derivada de f) a una función $f'$ que asocia a cada abscisa, $x$, la derivada de $f$ en ese punto, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

**Ejemplo 3.2.3.** La derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.

## 3.3. Cálculo de derivadas de funciones polinómicas

El cálculo de derivadas de funciones polinómicas es muy sencillo si recordamos dos reglas básicas:

- La derivada de una constante es 0.

$$(k)' = 0$$

- La derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función:

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

- La derivada de la suma (resta) de funciones es la suma (resta) de las derivadas:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

**Definición 3.3.1.** La derivada de un monomio $f(x) = ax^n$, con $n \neq 0$, es igual a $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$.

Obsérvese que el exponente $n$ no tiene por qué ser un número entero positivo.

**Ejemplo 3.3.1.** Ejemplos de derivadas de monomios:

- $f(x) = x^8 \to f'(x) = 8x^7$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^8} = x^{-8} \to f'(x) = -8x^{-8-1} = -8x^{-9} = \dfrac{-8}{x^9}$
- $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2} \to f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{3/5} \to f'(x) = \dfrac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \dfrac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}} = \dfrac{3}{5}(\sqrt[5]{x^2})^{-1} = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

Si consideramos una función polinómica como la suma y resta de monomios, derivar funciones polinómicas se reducirá a sumar y restar derivadas de monomios.
De manera genérica, la derivada de una función polinómica:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

será:

$$f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_1$$

**Ejemplo 3.3.2.** Ejemplos de algunas derivadas polinómicas:

- $f(x) = 3x \quad \to \quad f'(x) = 3$
- $f(x) = 3x^2 \quad \to \quad f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$
- $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

  $$\to f'(x) = 4 \cdot 3x^{3-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} + 3x^{1-1} - 0 = 12x^2 - 4x + 3$$
- $f(x) = \dfrac{3x}{2} = \frac{3}{2}x \quad \to \quad f'(x) = \frac{3}{2}$
- $f(x) = \dfrac{3x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2 \quad \to \quad f'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x^{2-1} = 3x$
- $f(x) = \dfrac{4x^3 - 5x^2 + 8x - 3}{5} = \frac{1}{5}(4x^3 - 5x^2 + 8x - 3)$

  $$\to f'(x) = \tfrac{1}{5}(4 \cdot 3x^{3-1} - 5 \cdot 2x^{2-1} + 8x^{1-1} - 0) = \frac{12x^2 - 10x + 8x}{5}$$
- $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} = 5x^{2/3}$

  $$\to \quad f'(x) = 5 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{-1/3} = \frac{10}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$
- $f(x) = -3\sqrt[3]{x^5} = -3x^{5/3}$

  $$\to f'(x) = -3\frac{5}{3} x^{5/3-1} = -5x^{2/3} = -5\sqrt[3]{x^2}$$
- $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x^5}} = -2x^{-5/3}$

  $$\to f'(x) = -2\left(\frac{-5}{3}\right) x^{-5/3-1} = \left(\frac{10}{3}\right) x^{-8/3} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^8}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x^8}}$$

## 3.4. Aplicaciones de las derivadas

Una de las aplicaciones mas útiles de las derivadas es el estudio del crecimiento y decrecimiento de la función para el cálculo de **máximos** y **mínimos**. Otra de sus utilidades es el cálculo de las segundas derivadas $f''(x)$ para determinar la concavidad o convexidad de las funciones.

**Definición 3.4.1.** Una función $f(x)$ se dice que tiene un máximo en $x_0$ si la función pasa de **crecer** ($f'(x_0) > 0$) a **decrecer** ($f'(x_0) < 0$) en $x_0$.

**Definición 3.4.2.** Una función $f(x)$ se dice que tiene un mínimo en $x_0$ si la función pasa de **decrecer** ($f'(x_0) < 0$) a **crecer** ($f'(x_0) > 0$) en $x_0$ (ver figura 3.3).

Como el crecimiento de las funciones se determina a partir del signo de la derivada, para determinar los máximos o mínimos de una función $f(x)$ solo habrá que calcular los puntos en los que la derivada se anule y estudiar el signo de $f'(x)$.

**Proposición 3.4.1.** Si una función $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo en $x_0$, entonces $f'(x_0) = 0$.

Obsérvese en el ejemplo siguiente que el recíproco no es cierto.

**Ejemplo 3.4.1.** Sea la función $f(x) = x^3$. Su derivada es $f'(x) = 3x^2$. En la figura 3.4 puede verse que en $x = 0$, la derivada se anula (la pendiente de la recta tangente es igual a 0, paralela al eje de ordenadas) y no se alcanza ni un máximo ni un mínimo.

Obsérvese que la derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$, siempre es positiva o cero, lo que indica que la función $f(x)$ es monótona creciente.

**Definición 3.4.3.** Una función $f(x)$ es convexa en un intervalo $(a, b)$ si para todo $x$ en el intervalo $(a, b)$, la función está por debajo del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

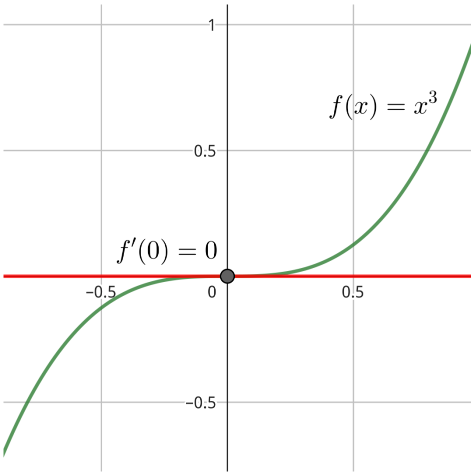



Figura 3.4: En $x = 0$ $f'(x)$ se anula pero no es ni un máximo ni un mínimo.

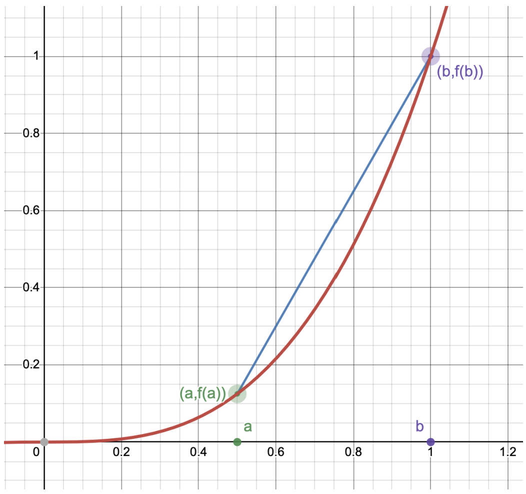



Figura 3.5: Función convexa en el intervalo $(a, b)$.

**Definición 3.4.4.** Una función $f(x)$ es cóncava en un intervalo $(a, b)$ si para todo $x$ en el intervalo $(a, b)$, la función está por encima del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

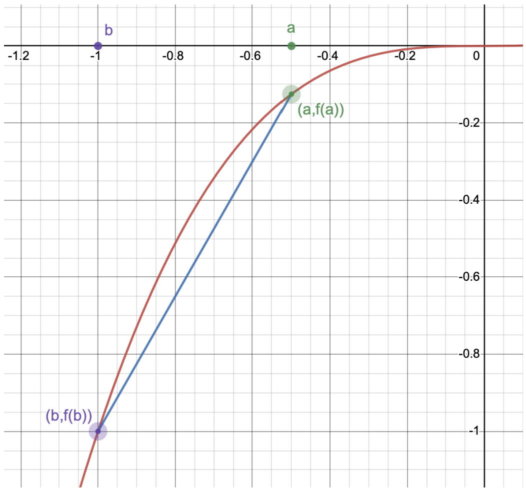



Figura 3.6: Función cóncava en el intervalo $(a, b)$.

**Proposición 3.4.2.** $f(x)$ es **convexa** en un punto $x_0$ si y solo si $f''(x_0) > 0$.

**Proposición 3.4.3.** $f(x)$ es **cóncava** en un punto $x_0$ si y solo si $f''(x_0) < 0$.

**Ejemplo 3.4.2.** La función $f(x) = -x^2$ es cóncava en todo su dominio:

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f''(x) = -2 < 0, \text{ para todo } x.$$

Luego $f(x) = -2x^2$ es cóncava en todo su dominio de definición.

**Definición 3.4.5.** Llamamos **punto de inflexión** de una función $f(x)$ a cualquier punto donde $f(x)$ pasa de ser cóncava a convexa o viceversa.

**Proposición 3.4.4.** Si $x_0$ es un punto de inflexión de $f(x)$, entonces:

$$f''(x_0) = 0$$

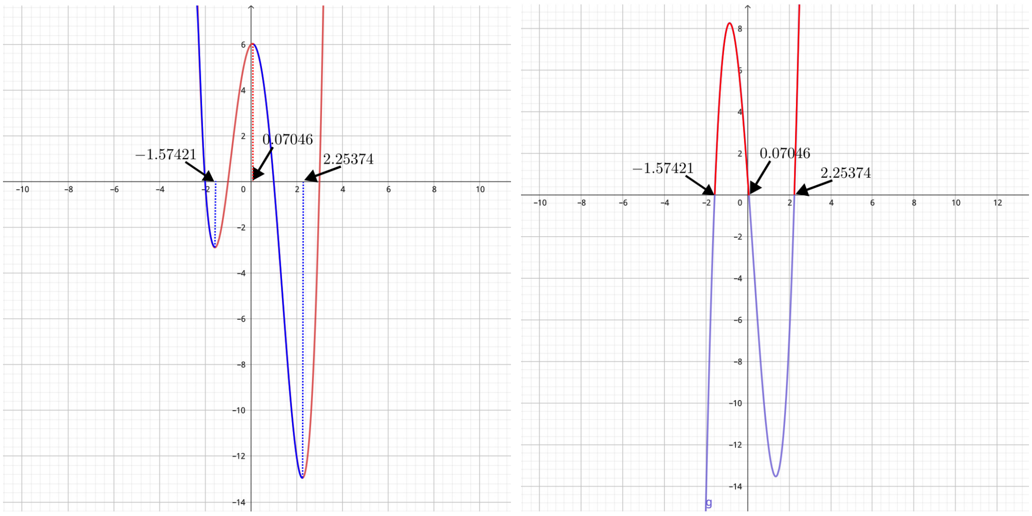
El recíproco no tiene por que ser necesariamente cierto.

**Observación:** Si en un punto $x_0$, $f'(x_0) = 0$ pero $f(x)$ no cambia su crecimiento o decrecimiento en ese punto, $x_0$ es un **punto de inflexión**. Esto equivale a decir que en un entorno de $x_0$ la derivada $f'(x)$ no cambia de signo (ver figura 3.4).

**Ejemplo 3.4.3.** Dada la función $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, calcule sus máximos y sus mínimos (ver figura 3.7):

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 14x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1{,}57421, x = 0{,}07046$, y $x = 0{,}25374$ son las raíces del polinomio $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 14x + 1$.

- Si $x \in (-\infty, -1{,}57421) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x \in (-1{,}57421, 0{,}07046) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.
  - En $x = -1,57421$ la función $f(x)$ tiene un mínimo.
- Si $x \in (0{,}07046, 2{,}25374) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.
  - En $x = 0{,}07046$ la función $f(x)$ tiene un máximo.
- Si $x \in (2{,}25374, \infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.
  - En $x = 2{,}25374$ la función $f(x)$ tiene un máximo.




(a) Monotonía de $f(x)$: rojo crece, azul decrece

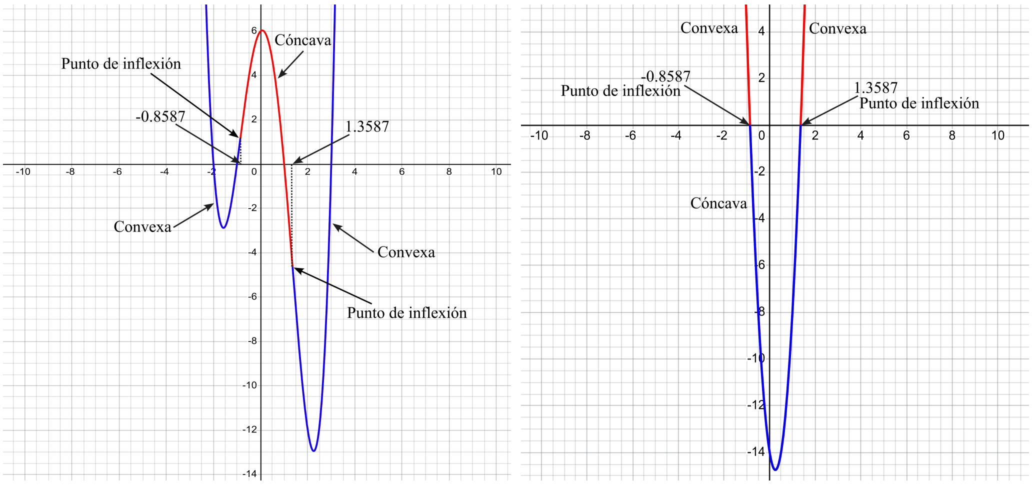
(b) Signo de $f'(x)$: rojo (+) $f(x)$ crece, azul (-) $f(x)$ decrece

Figura 3.7: Estudio de la monotonía, máximos y mínimos

**Ejemplo 3.4.4.** Dada la función $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, determine su concavidad y su convexidad (ver figura 3.8):

$f''(x) = 12x^2 - 6x - 14 = 0 \Rightarrow x = -0{,}8587$ y $x = 1{,}3587$ son las raíces del polinomio $f''(x) = 12x^2 - 6x - 14$.

- Si $x \in (-\infty, -0{,}8587) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.
  - En $x = -0{,}8587$ la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión (obsérvese que en $x = -0{,}8587$ la derivada $f'(-0{,}8587) > 0$ y la función crece.
- Si $x \in (-0{,}8587, 1{,}3587) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.
  - En $x = 1{,}3587$ la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión (obsérvese que en $x = 1{,}3587$ la derivada $f'(1{,}3587) < 0$ y la función decrece.
- Si $x \in (1{,}3587, \infty) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.




(a) Monotonía de $f(x)$: rojo cóncava, azul convexa

(b) Signo de $f''(x)$: rojo (+) $f(x)$ cóncava, azul (-) $f(x)$ convexa

Figura 3.8: Estudio de la concavidad y convexidad