Tema 4

Integrales polinómicas

M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.

La **integral** de una función $f(x)$ se denota como $\int f(x)dx$. A la expresión $\int f(x)dx$ se la llama también **integral indefinida** o, simplemente, integral de $f(x)$. En este tema veremos qué es la integral de una función, tanto definida como indefinida, cómo se calculan y algunas de sus aplicaciones. Nos centraremos en funciones polinómicas reales de variable real, siendo las más sencillas de calcular e interpretar

4.1. Conceptos previos

Función polinómica: Es una función real de variable real cuya expresión general tiene la siguiente forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_0, a_1, ..., a_n son los coeficientes del polinomio y pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. $a_n x^n$ es el término principal y n indica el grado de la función polinómica.

Función primitiva: Llamamos a $F(x)$ función primitiva, o simplemente primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Esto se expresa como:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Ejemplo 4.1.1.

$\int 2x\ dx = x^2$, porque $(x^2)' = 2x$.

$\int 2x + 5\ dx = x^2 + 5x$, porque $(x^2 + 5x)$' = 2x + 5.

Teorema fundamental del cálculo infinitesimal: La derivada de la primitiva de una función es la propia función, esto es:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x))' = f(x)$$

.

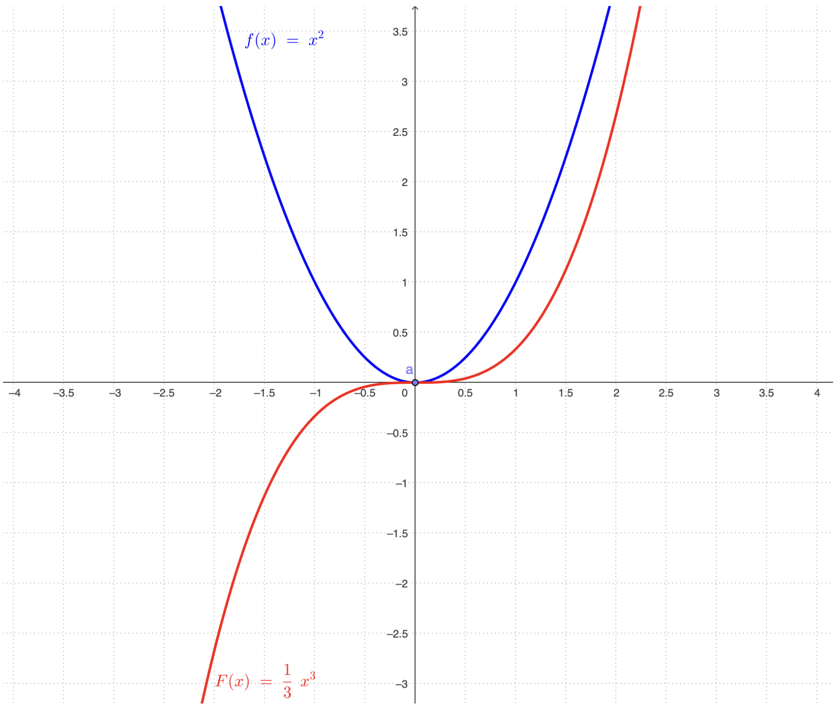

Figura 4.1: En azul $f(x) = x^2$ y en rojo una primitiva $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$

Observación: Una función tiene infinitas primitivas, puesto que si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ (esto es $F'(x) = f(x)$), entonces $F(x)+k$ también es una primitiva de $f(x)$, ya que $(F(x)+k)' = f(x)+0 = F'(x)+(k)' = f(x)+0 = f(x)$.

Al cálculo de primitivas se le suele llamar **cálculo de integrales** o **integración**.

4.2. Propiedades

Puesto que la integración es la operación opuesta a la derivación, hay propiedades básicas que se derivan de inmediato:

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$

Ejemplo 4.2.1.

- $\int x^2 - x^3 dx = \int x^2 dx - \int x^3 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + k,$
  porque $(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + k)' = \frac{3x^2}{3} - \frac{4x^3}{4} = x^2 - x^3.$
- $\int 3x^5 dx = 3\int x^5 dx = 3\frac{x^6}{6} + k,$
  porque $(3\frac{x^6}{6} + k)' = 3x^5.$

4.3. Cálculo de primitivas o integrales

Constantes: $\int c\ dx = cx + k$

Potencias: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

Caso especial: la función $f(x) = \frac{1}{x}$, que también podríamos expresar como $f(x) = x^{-1}$. En este caso: $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + k$, ya que si $x > 0$ entonces $(ln\ x + k)' = \frac{1}{x}$ y si $x < 0$, $(ln(-x) + k)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

La generalización sería:

Cociente de la derivada de una función entre la propia función:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + k$$

Ejemplo 4.3.1. Calcula la integral de las siguientes funciones:

- $\displaystyle\int 5x^3dx = \frac{5x^4}{4} + k.$
- $\displaystyle\int \frac{4}{x^2}dx = \int 4x^{-2}dx = \frac{4x^{-1}}{-1} + k = \frac{-4}{x} + k.$
- $\displaystyle\int 3x^2 + \frac{5}{x^2}dx = \int 3x^2dx + \int \frac{5}{x^2}dx = \int 3x^2dx + \int 5x^{-2}dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^{-1}}{-1} + k = x^3 - \frac{5}{x} + k.$
- $\displaystyle\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt[2]{x^3}}{3} + k.$
- $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^5}\ dx = \int x^{5/3}dx = \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + k = \frac{x^{8/3}}{8/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8} + k.$
- $\displaystyle\int \sqrt{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x^2}}dx = \int \sqrt{x^5}\ dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2}}dx = \int x^{5/2}dx + \int \frac{1}{x^{1/2}}dx = \int x^{5/2}dx + \int x^{-1/2}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + k = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = \frac{\sqrt{x^7}}{\frac{7}{2}} + \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} + k = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} + 2\sqrt{x} + k.$
- $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2}dx = ln|x^3 + x^2| + k$

4.4. Integral definida

Definición 4.4.1. La **integral definida** es el área entre la curva $y = f(x)$ y el eje de ordenadas X en un intervalo $[a, b]$. Se denota como $\int_a^b f(x)dx$ y se lee como integral definida de $f(x)$ entre a y b (ver figura 4.2).
Si $f(x) > 0$ (está por encima del eje X) su valor es positivo y si $f(x) < 0$ (está por debajo del eje X) su valor es negativo.

Regla de Barrow: Nos permite calcular integrales definidas $\int_a^b f(x)dx$:

1. Calculamos una primitiva de la función $f(x)$: $F(x) = \int f(x)dx$.
2. Se calculan los valores $F(a)$ y $F(b)$.
3. El resultado es: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. También se denota como $\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b$

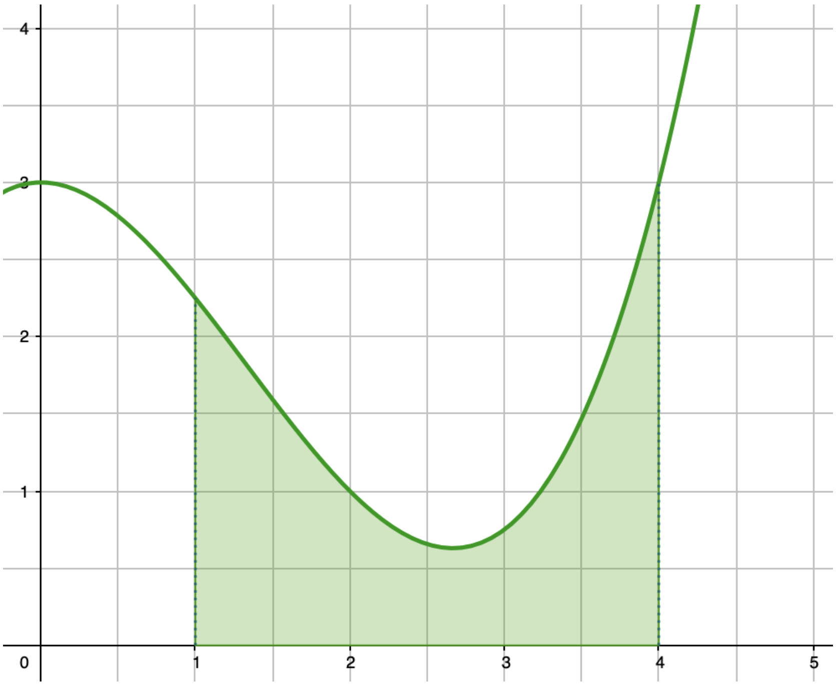

Figura 4.2: El área en verde representa la integral definida $\int_1^4 \frac{x^3}{4} - x^2 + 3\ dx$

Ejemplo 4.4.1. Calculemos la integral definida $\int_1^4 \frac{x^3}{4} - x^2 + 3\ dx$:

$$\int_1^4 \frac{x^3}{4} - x^2 + 3\ dx = \left(\frac{x^4}{4 \cdot 4} - \frac{x^3}{3} + 3x\right]_1^4 = \left(\frac{4^4}{16} - \frac{4^3}{3} + 3 \cdot 4\right) - \left(\frac{1^4}{16} - \frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1\right) = \frac{20}{3} - \frac{131}{48} = \frac{63}{16}$$