Tema 4

Ejercicios resueltos de integrales polinómicas

M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.

4.1. Cálculo de primitivas

Ejercicio 4.1.1. $f(x) = 5x^3 + 2$.

Solución:

$\int f(x)dx = \int (5x^3 + 2)dx = \int 5x^3\ dx + \int 2\ dx = 5\int x^3\ dx + \int 2\ dx =$

$$= 5\frac{x^{(3+1)}}{(3+1)} + 2x + c = \frac{5x^4}{4} + 2x + c$$

Ejercicio 4.1.2. $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x - 5$.

Solución:

$$\int f(x)dx = \int \left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x - 5\right) dx = \int -\frac{3}{4}x^2\ dx + \int 2x\ dx - \int 5\ dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\int x^2\ dx + 2\int x\ dx - \int 5\ dx = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x^{(2+1)}}{(2+1)} + 2\frac{x^{(1+1)}}{(1+1)} - 5x + c =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 5x + c = -\frac{x^3}{4} + x^2 - 5x + c$$

Ejercicio 4.1.3. $f(x) = \dfrac{6x^3 + 9x^2 + 3}{4}$.

Solución:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{6x^3 + 9x^2 + 3}{4}\right) dx = \frac{1}{4}\int \left(6x^3 + 9x^2 + 3\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int 6x^3\ dx + \int 9x^2\ dx + \int 3\ dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(6\frac{x^{(3+1)}}{(3+1)} + 9\frac{x^{(2+1)}}{(2+1)} + 3x\right) + c = \frac{1}{4}\left(\frac{6x^4}{4} + 3x^3 + 3x\right) + c =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{6x^4}{4} + \frac{1}{4}\cdot 3x^3 + \frac{1}{4}\cdot 3x + c = \frac{3}{8}x^4 + \frac{3x^3}{4} + \frac{3x}{4} + c$$

Ejercicio 4.1.4. $f(x) = (x-3)^2$.

Solución:

$$\int f(x)dx = \int (x-3)^2\ dx = \int \left(x^2 + 9 - 6x\right) dx =$$

$$= \int x^2\ dx + \int 9\ dx - \int 6x\ dx = \frac{x^3}{3} + 9x - \frac{6x^2}{2} + c = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + c$$

Ejercicio 4.1.5. $f(x) = \dfrac{3(x^2-3)^2}{4} - (4x-1)$.

Solución:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{3(x^2-3)^2}{4} - (4x-1)\right) dx =$$

$$= \int \frac{3(x^2-3)^2}{4}dx - \int (4x-1)dx = \frac{3}{4}\int (x^2-3)^2\ dx - \int (4x-1)\ dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int (x^4 + 9 - 6x^2)\ dx - \int (4x-1)\ dx =$$

$$= \frac{3}{4}(\int x^4\ dx + \int 9\ dx - \int 6x^2\ dx) - (\int 4x\ dx - \int\ dx) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{x^5}{5} + 9x - \frac{6x^3}{3}\right) - \left(\frac{4x^2}{2} - x\right) + c =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}\cdot 9x - \frac{3}{4}\cdot\frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x + c = \frac{3x^5}{20} + \frac{27x}{4} - \frac{3x^3}{2} - 2x^2 + x + c =$$

$$= \frac{3x^5}{20} - \frac{3x^3}{2} - 2x^2 + \left(\frac{27}{4} + 1\right)x + c = \frac{3}{20}x^5 - \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{31}{4}x + c$$

Ejercicio 4.1.6. $f(x) = \dfrac{6x^2 - 3}{2x^3 - 3x}$.

Solución:

$$\int f(x)dx = \int \frac{6x^2 - 3}{2x^3 - 3x}dx$$

Si nos fijamos, el numerador de la función $f(x)$ es la derivada del denominador. Así, si llamamos $g(x) = 2x^3 - 3x$, tenemos que $g'(x) = 6x^2 - 3$. Por lo tanto:

$$\int f(x)dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{6x^2 - 3}{2x^3 - 3x}dx = log|2x^3 - 3x| + c$$

Ejercicio 4.1.7. $f(x) = \sqrt{x^5}$.

Solución:

$$\int f(x)dx = \int \sqrt{x^5}\ dx = \int x^{5/2}\ dx = \frac{x^{(\frac{5}{2}+1)}}{(\frac{5}{2}+1)} + c = \frac{x^{7/2}}{7/2} + c = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} + c$$

4.2. Cálculo de integrales definidas

Nota: En los ejercicios anteriores ya se han calculado las funciones primitivas.

Ejercicio 4.2.1. $\int_0^3 (5x^3+2)dx$.

Solución:

$$\int_0^3 (5x^3+2)dx = \left.\frac{5x^4}{4}+2x\right]_0^3 = \left(\frac{5\cdot 3^4}{4}+2\cdot 3\right) - \left(\frac{5\cdot 0^4}{4}+2\cdot 0\right) =$$

$$= \frac{405}{4}+6-0 = \frac{429}{4}$$

Ejercicio 4.2.2. $\int_1^4 \left(-\frac{3}{4}x^2+2x-5\right)dx$.

Solución:

$$\int_1^4 \left(-\frac{3}{4}x^2+2x-5\right)dx = \left.-\frac{x^3}{4}+x^2-5x\right]_1^4 =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{4}+4^2-5\cdot 4\right) - \left(-\frac{1^3}{4}+1^2-5\cdot 1\right) = -20+\frac{17}{4} = -\frac{63}{4}$$

Ejercicio 4.2.3. $\int_{-1}^1 \left(\frac{6x^3+9x^2+3}{4}\right)dx$.

Solución:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{6x^3+9x^2+3}{4}\right)dx = \left.\frac{3}{8}x^4+\frac{3}{4}x^3+\frac{3}{4}x\right]_{-1}^1 =$$

$$= \left(\frac{3}{8}\cdot 1^4+\frac{3}{4}\cdot 1^3+\frac{3}{4}\cdot 1\right) - \left(\frac{3}{8}(-1)^4+\frac{3}{4}(-1)^3+\frac{3}{4}(-1)\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{4}+\frac{6}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Ejercicio 4.2.4. $\displaystyle\int_3^5 (x-3)^2\ dx.$

Solución:

$$\int_3^5 (x-3)^2\ dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_3^5 = \left(\frac{5^3}{3} - 3\cdot 5^2 + 9\cdot 5\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3\cdot 3^2 + 9\cdot 3\right) =$$

$$= \left(\frac{125}{3} - 75 + 45\right) - (9 - 27 + 27) = \frac{35}{3} - 9 = \frac{8}{3}$$

Ejercicio 4.2.5. $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\frac{3(x^2-3)^2}{4} - (4x-1)\right) dx.$

Solución:

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{3(x^2-3)^2}{4} - (4x-1)\right) dx = \left.\frac{3}{20}x^5 - \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{21}{4}x\right]_{-1}^0 =$$

$$= \left(\frac{3}{20}(-1)^5 - \frac{3}{2}(-1)^3 - 2(-1)^2 + \frac{31}{4}(-1)\right) - \left(\frac{3}{20}0^5 - \frac{3}{2}0^3 - 2\cdot 0^2 + \frac{31}{4}0\right) =$$

$$= -\frac{3}{20} + \frac{3}{2} - 2 - \frac{31}{4} - 0 = \frac{168}{20} = \frac{42}{5}$$

Ejercicio 4.2.6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^2-3}{2x^3-3x} dx.$

Solución:

$$\int_1^2 \frac{6x^2-3}{2x^3-3x} dx = \left. log|2x^3 - 3x|\right]_1^2 = \left(log|2\cdot 2^3 - 3\cdot 2|\right) - \left(log|2\cdot 1^3 - 3\cdot 1|\right) =$$

$$= log\ 10 - log\ 1 = log\ 10 \approx 2{,}302585$$

Ejercicio 4.2.7. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^5}\ dx$.

Solución:

$$\int_0^2 \sqrt{x^5}\ dx = \left.\frac{2\sqrt{x^7}}{7}\right]_0^2 = \left(\frac{2\sqrt{2^7}}{7}\right) - \left(\frac{2\sqrt{0^7}}{7}\right) = \frac{2\cdot 2^3\sqrt{2}}{7} - 0 =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{7} \approx 3{,}232488$$

4.3. Integrales definidas de funciones por partes

Ejercicio 4.3.1. Calcula la integral entre -1 y 1 de la siguiente función dada por partes:

$$f(x) = \begin{cases} 4+x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -2x+1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Solución:

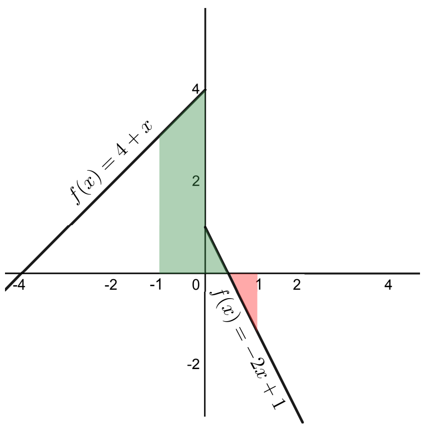

Figura 4.1: En verde, la parte positiva de la integral definida; en rojo, la parte negativa. El área verde menos el área roja tiene un valor de $\frac{11}{2}$.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 4+x\ dx + \int_0^1 -2x+1\ dx =$$

$$= \left(4x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + (-x^2 + x]_0^1 = \left(4 \cdot 0 + \frac{0^2}{2}\right) - \left(4(-1) + \frac{(-1)^2}{2}\right) +$$

$$+ (-1^2 + 1) - (-0^2 + 0) = 0 - (-4 + \frac{1}{2}) + 2 - 0 = 4 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{11}{2}$$

Ejercicio 4.3.2. Calcula la integral entre 1,5 y 5 de la siguiente función dada por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x\left(\dfrac{x^2}{3} - 3\right) & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \\ x^2 - 7x + 12 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Solución:

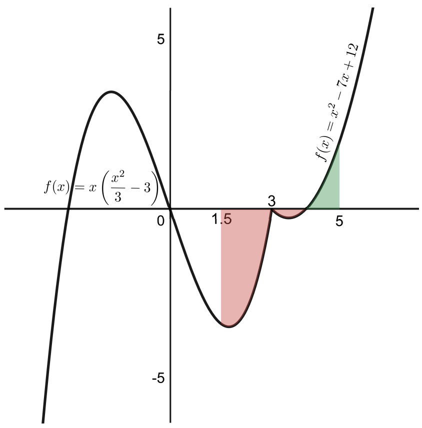

Figura 4.2: En verde, la parte positiva de la integral definida; en rojo, la parte negativa. El área verde menos el área roja tiene un valor de -$\frac{601}{192}$.

$$\int_{1,5}^{5} f(x)dx = \int_{1,5}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{5} f(x)dx =$$

$$= \int_{1,5}^{3} x\left(\frac{x^2}{3} - 3\right) dx + \int_{3}^{5} (x^2 - 7x + 12)dx =$$

$$= \int_{1,5}^{3} \frac{x^3}{3} - 3x\,dx + \int_{3}^{5} (x^2 - 7x + 12)dx = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{3x^2}{2} \right]_{1,5}^{3} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 12x \right]_{3}^{5} =$$

$$= \left(\frac{3^4}{12} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) - \left(\frac{1{,}5^4}{12} - \frac{3 \cdot 1{,}5^2}{2} \right) + \left(\frac{5^3}{3} - \frac{7 \cdot 5^2}{2} + 12 \cdot 5 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - \frac{7 \cdot 3^2}{2} + 12 \cdot 3 \right) =$$

$$= \left(\frac{81}{12} - \frac{27}{2} - \frac{27}{64} + \frac{27}{8} \right) + \left(\frac{125}{3} - \frac{175}{2} + 60 - 9 + \frac{63}{2} - 36 \right) =$$

$$= -\frac{243}{60} + \frac{2}{3} = -\frac{601}{192}$$

Ejercicio 4.3.3. Calcula la integral entre 1 y 2 de la siguiente función dada por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x\left(\dfrac{x^2}{3} - 3\right) & \text{si} \quad x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 12 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Solución:

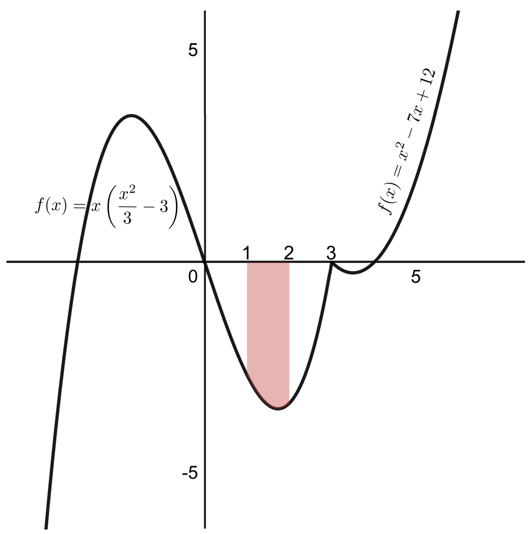

Figura 4.3: En rojo la integral definida, que es negativa. El área área roja tiene un valor de -$\frac{39}{12}$.

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x\left(\frac{x^2}{3}-3\right)dx = \left(\frac{x^4}{12}-\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^4}{12}-\frac{3\cdot 2^2}{2}\right)-\left(\frac{1^4}{12}-\frac{3\cdot 1^2}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{16}{12}-\frac{12}{2}\right)-\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{2}\right) = -\frac{56}{12}+\frac{17}{12} = -\frac{39}{12}$$

4.4. Integrales definidas dependientes de un parámetro

Ejercicio 4.4.1. Calcula $\int_0^2 3x^2 - mx + 4\,dx$ para cualquier valor de m.

Solución:

$$\int_0^2 3x^2 - mx + 4\,dx = x^3 - \frac{mx^2}{2} + 4x\Big]_0^3 = \left(3^3 - \frac{m3^2}{2} + 4\cdot 3\right) - \left(0^3 - \frac{m0^2}{2} + 4\cdot 0\right) =$$

$$= 27 - \frac{9m}{2} + 12 - 0 = 39 - \frac{9m}{2}$$

Ejercicio 4.4.2. Calcula la integral entre 0 y 100 de la función $f(x)$, para cualquier valor de k:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0 \le x \le 100 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Solución:

$$\int_0^{100} f(x)dx = \int_0^{100} \frac{k}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{100} kx^{-1/2}\,dx = \frac{k}{1/2}x^{(-\frac{1}{2}+1)}\Big]_0^{100} = 2kx^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{100} =$$

$$= 2k\sqrt{x}\Big]_0^{100} = \left(2k\sqrt{100}\right) - \left(2k\sqrt{0}\right) = 20k - 0 = 20k$$

Ejercicio 4.4.3. Calcula la integral entre 0 y m de la función $f(x)$, para cualquier valor de m:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ (2-x) & \text{si} \quad 1 \leq x \leq m \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Solución:

$$\int_0^m f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^m f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\, dx + \int_1^m (2-x)\, dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right]_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^m = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(2m - \frac{m^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + 2m - \frac{m^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{m^2}{2} + 2m - 1$$