Tema 5

Sistemas de ecuaciones lineales

M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.

En este capítulo veremos como resolver sistemas de ecuaciones lineales. En primer lugar se presentan conceptos previos sobre qué es una ecuación lineal, un sistema de ecuaciones lineales, así como los posibles tipos de soluciones que pueden tener los sistemas de ecuaciones.

Posteriormente, se introducen dos métodos para resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, el método de sustitución e igualación. Finalmente se presenta un apartado de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos o más incógnitas por el método de Gauss. Cada sección se presenta con ejemplos resueltos y resolución gráfica.

En los pie de figura de algunos de los ejemplos encontrarás un enlace a la web https://www.desmos.com donde podrás visualizar la representación gráfica del sistema de ecuaciones que se plantea. En dicha web puedes, pinchando y sin soltar, moverte por la gráfica para tener una perspectiva mas clara de cómo se intersectan los planos.

5.1. Conceptos previos

Ecuación lineal: Es una ecuación polinómica de grado uno con una o varias incógnitas.

$$5x + 4y = 20$$

Una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta del plano. Si solo tiene una incógnita es una recta paralela al eje X o el eje Y, según sea la única incógnita la y o la x, respectivamente. Los puntos de la recta son las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 5.1.1. $5x + 4y = 20$ es una recta en el plano XY. Los puntos $(4,\ 0)$, $(0,\ 5)$ y $(3,\ 1{,}25)$ pertenecen a la recta, y por tanto, son soluciones de la ecuación. Por ejemplo: $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}25 = 20$.

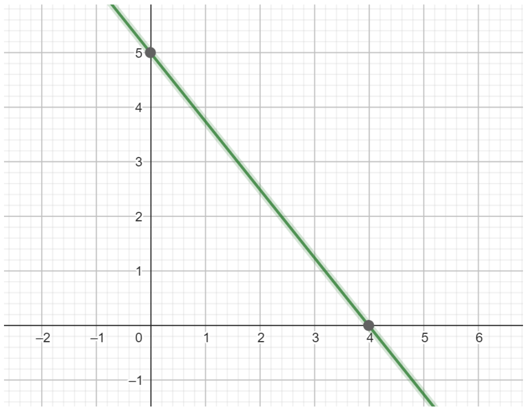

Figura 5.1: Representación gráfica de $5x + 4y = 20$.

Observación: Una ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano en el espacio. Los puntos del plano son las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 5.1.2. 3x+2y+6z=6 es un plano en el espacio tridimensional.

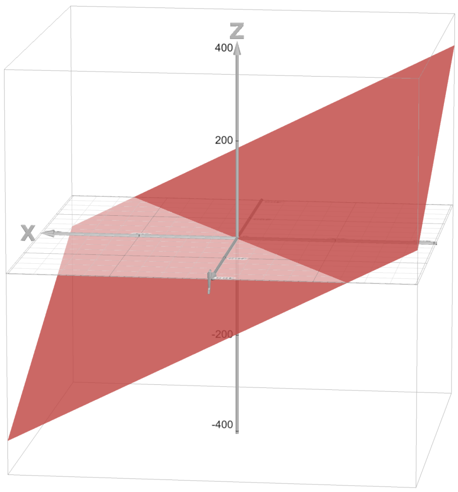

Figura 5.2: Representación gráfica de $3x + 2y + 6z = 6$. (Ver figura 3D en www.desmos.com/3d/fbe404cf17)

Sistema de ecuaciones lineales:

Varias ecuaciones dadas conjuntamente con el fin de determinar la solución o las soluciones comunes a todas ellas forman un sistema de ecuaciones.

- Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas representa un conjunto de rectas. Su resolución consiste en averiguar si todas ellas tienen algún punto en común y localizado.

Ejemplo 5.1.3.

$$\left.\begin{array}{rl} 2x - 5y = 16 & \text{(Ec. 1)} \\ x + 3y = -3 & \text{(Ec. 2)} \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 3$, $y = -2$

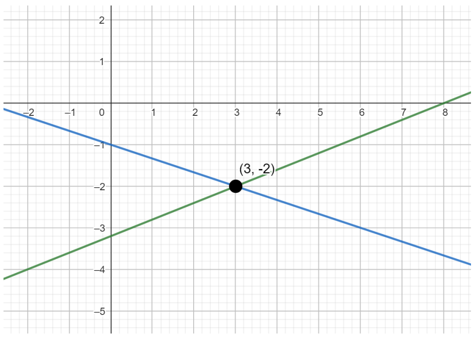

Figura 5.3: Representación gráfica del sistema de ecuaciones. Ec.1 en azul y Ec. 2 en verde. Punto (3,-2) solución del sistema.

Observación: Si las ecuaciones de un sistema tienen tres incógnitas, representan planos. Resolver el sistema es encontrar el punto o los puntos que tienen en común todos estos planos.

5.2. Posibles soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones puede tener solución (**compatible**) o no tener solución (**incompatible**).

Los sistemas compatibles pueden tener una única solución (**determinados**) o infinitas soluciones (**indeterminados**).

- **SISTEMAS COMPATIBLES:** Con solución

  \- **Determinados:** Solución única.

  Para poder averiguar si un sistema es determinado a priori, sin resolverlo, se puede calcular el determinante de los coeficientes, si éste es distinto de 0, el sistema es determinado, tendría solución única. Si el determinante es igual a 0, no tiene solución, podría ser compatible indeterminado o incompatible.

Ejemplo 5.2.1.

$$\left.\begin{array}{ll} 2x + 3y = 9 & \text{(Ec. 1)} \\ 3x - 5y = 4 & \text{(Ec. 2)} \end{array}\right\}$$

Solución: x=3; y=1

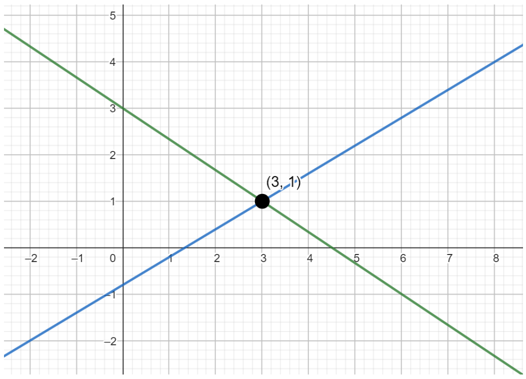

Figura 5.4: Representación gráfica del sistema de ecuaciones compatible determinado. Ec. 1 en azul y Ec. 2 en verde. Punto (3,1) solución única del sistema.

Ejemplo 5.2.2.

$$\left.\begin{array}{c} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 1$, $y = 7$, $z = -2$

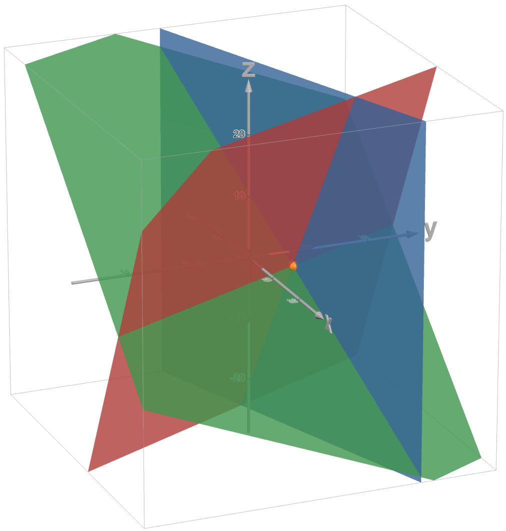

Figura 5.5: Representación gráfica del sistema de ecuaciones compatible determinado (ejemplo 5.2.2). Punto (1,7,-2) solución única del sistema. (Ver figura 3D en www.desmos.com/3d/03f8a647bb)

- **Indeterminados:** Infinitas soluciones.

Ejemplo 5.2.3.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 6y = 18 \end{array}\right\}$$

Solución: Las rectas coinciden en todos los puntos. Hay infinitas soluciones.

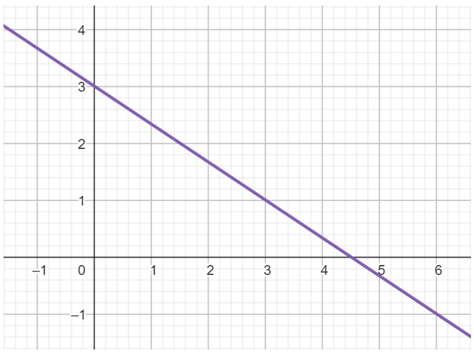

Figura 5.6: Representación gráfica del sistema de ecuaciones compatible indeterminado. Una recta está superpuesta a la otra. Infinitas soluciones.

Ejemplo 5.2.4.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 11 \\ x + y = -20 \\ 3x + 2y - z = -9 \end{array}\right\}$$

Solución: Todos los puntos de la recta donde se cortan los planos son solución del sistema.

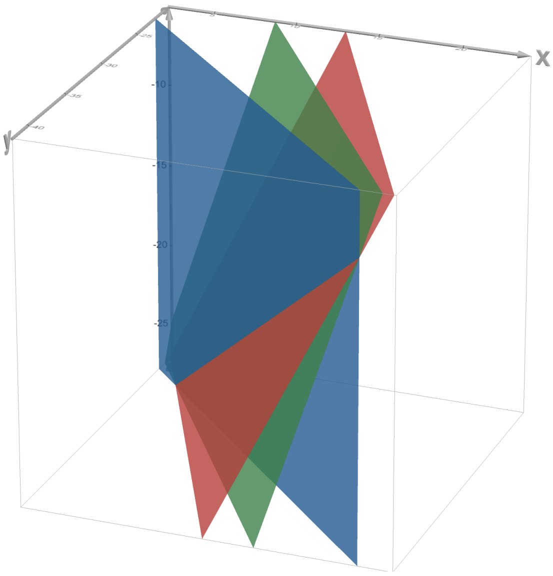

Figura 5.7: Representación gráfica del sistema de ecuaciones compatible indeterminado. Infinitas soluciones. (Ver figura 3D en www.desmos.com/3d/b0ecec297f)

- **SISTEMAS INCOMPATIBLES**: Sin solución.

Ejemplo 5.2.5.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 6y = 12 \end{array}\right\}$$

Solución: Las rectas no se cortan, luego no existe solución.

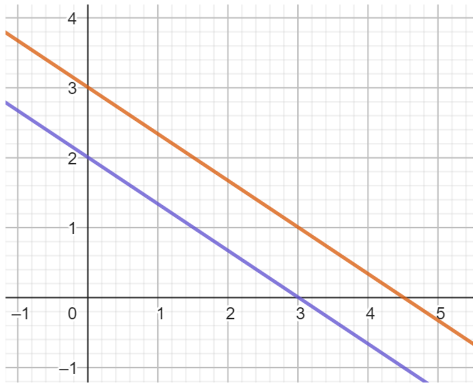

Figura 5.8: Representación gráfica del sistema de ecuaciones incompatible (ejemplo 5.2.5). Sin solución.

Ejemplo 5.2.6.

$$\left.\begin{array}{c} 8x + 4y - 4z = 11 \\ x + y = -20 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{array}\right\}$$

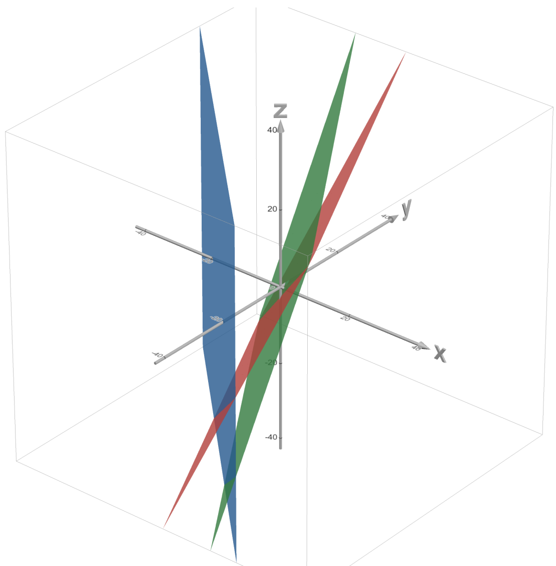

Figura 5.9: Representación gráfica del sistema de ecuaciones incompatible. Sin solución. (Ver figura 3D en www.desmos.com/3d/0586193f7d)

5.3. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Método de sustitución

Consiste en despejar o aislar una de las incógnitas (por ejemplo, x) y sustituir su expresión en la otra ecuación. De este modo, obtendremos una ecuación de primer grado con la otra incógnita, y. Una vez resuelta, calculamos el valor de x sustituyendo el valor de y que ya conocemos.

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución seguiremos los siguientes pasos:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo un ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo 5.3.1.

$$\left.\begin{array}{r} 5x - y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{array}\right\}$$

1. Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Se suele elegir la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$$x = 10 - 3y$$

2. Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$$5(10 - 3y) - y = 6$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$5(10 - 3y) - y = 6$$
$$50 - 15y - y = 6$$
$$-16y = 6 - 50$$

$$-16y = -44$$
$$y = \frac{-44}{-16}$$
$$y = \frac{11}{4}$$

4. Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada:

$$x = 10 - 3y$$
$$x = 10 - 3\frac{11}{4}$$
$$x = 10 - \frac{33}{4}$$
$$x = \frac{40}{4} - \frac{33}{4}$$
$$x = \frac{7}{4}$$

Solución: $x = \frac{7}{4},\ y = \frac{11}{4}$

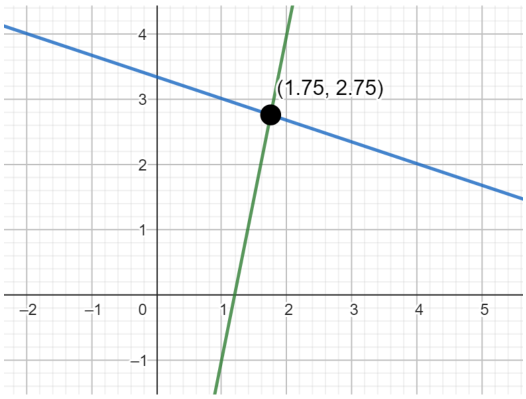

Figura 5.10: Representación gráfica del sistema de ecuaciones (ejemplo 5.3.1). Punto $(\frac{7}{4}, \frac{11}{4})$ solución del sistema.

Método de igualación

Consiste en aislar en ambas ecuaciones la misma incógnita para poder igualar las expresiones, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita.

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de igualación seguiremos los siguientes pasos:

1. Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Igualamos las expresiones, lo que nos permite obtener una ecuación con una incógnita.
3. Resolvemos la ecuación.
4. Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo 5.3.2.

$$\left.\begin{array}{r} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y=16 \end{array}\right\}$$

1. Despejamos, por ejemplo, la incógnita x de la primera y de la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y=16 \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} 3x=-6+4y \to x=\frac{-6+4y}{3} \\ 2x=16-4y \to x=\frac{16-4y}{2} \end{array}$$

2. Igualamos las expresiones:

$$\frac{-6+4y}{3}=\frac{16-4y}{2}$$

3. Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 2(-6+4y) &= 3(16-4y) \\ -12+8y &= 48-12y \\ 8y+12y &= 48+12 \\ 20y &= 60 \\ y &= \frac{60}{20} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

4. Sustituimos el valor de y, en cualquiera de las 2 ecuaciones (en cualquiera de las 2, el resultado debe ser el mismo):

$$x = \frac{-6+4y}{3}$$
$$x = \frac{-6+4\cdot 3}{3} = \frac{-6+12}{3} = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

Solución: $x = 2, \ y = 3$

5.4. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos o más incógnitas por el método de Gauss.

El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro escalonado. Para ello, "hacemos ceros"sometiendo las ecuaciones a dos transformaciones elementales:
- Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
- Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.

El proceso se realiza muy ventajosamente si, en lugar de las ecuaciones, utilizamos exclusivamente los números, coeficientes y términos independientes, estructurados en matrices.

Nota: Para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas se podría utilizar el método de reducción.

A considerar durante el proceso:
- Dos filas iguales o proporcionales. Corresponden a ecuaciones equivalentes y podemos prescindir inmediantamente de una de ellas.
- Una fila de ceros. Corresponde a una ecuación trivial y podemos prescindir de ella. En este caso sería un sistema compatible indeterminado.
- Una fila de ceros, salvo el último número distinto de cero, que corresponde con el término independiente, se trata de una ecuación imposible, En estos casos, reconocemos de inmediato que el sistema es incompatible.

Criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones

1. Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.
2. Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.
3. Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.
4. Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.
5. Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.

Ejemplo 5.4.1.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$$

1. Escribimos en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

2. Intercambiamos las filas f_1 y f_3 y obtenemos por el criterio 5 la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3. Reemplazamos las filas $\{f_2, f_3\}$ por $\{f_2 - 5f_1, f_3 - 3f_1\}$ respectivamente y obtenemos por el criterio 4 la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

4. Reemplazamos las filas $\{f_1, f_3\}$ por $\{2f_1 + f_2, 2f_3 - f_2\}$ respectivamente y obtenemos por el criterio 4 la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

5. Reemplazamos las filas $\{f_1, f_2\}$ por $\{f_1 + 7f_3, f_2 + 9f_3\}$ respectivamente y obtenemos por el criterio 4 la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

6. Reemplazamos las filas $\{f_1, f_2, f_3\}$ por $\left\{\frac{1}{2}f_1, -\frac{1}{2}f_2, -f_3\right\}$ respectivamente y obtenemos por el criterio 2 la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

7. Tenemos que el sistema original es compatible determinado.
8. *Solución:* $x = -4, \; y = 6, \; z = 1$

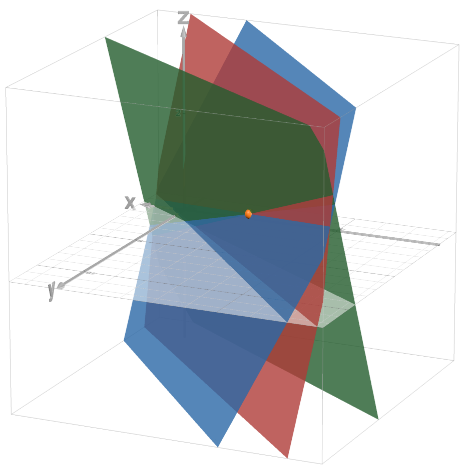

Figura 5.11: Representación gráfica del sistema de ecuaciones (ejemplo 5.4.1). Punto (-4,6,1) solución del sistema. (Ver figura 3D en www.desmos.com/3d/d2f0c5019a)