Tema 5

Ejercicios resueltos de sistemas de ecuaciones lineales

M. Dueñas, R. Páez, C. Valverde.

Al final de algunos de los ejercicios encontrarás un enlace a la web https://www.desmos.com donde podrás visualizar la representación gráfica del sistema de ecuaciones que se propone resolver. En dicha web puedes, pinchando y sin soltar, moverte por la gráfica para tener una perspectiva mas clara de como se intersectan los planos.

5.1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

5.1.1. Método de sustitución

Ejercicio 5.1.1.

$$\left.\begin{array}{r} 4+x=2y \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$$

Solución:

1. Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones.

$$x = 2y - 4$$

2. Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$$2(2y-4) - y = 1$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned} 2(2y-4)-y&=1\\ 4y-8-y&=1\\ 3y&=1+8\\ 3y&=9\\ y&=\frac{9}{3}\\ y&=3 \end{aligned}$$

4. Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada:

$$\begin{aligned} x&=2y-4\\ x&=2\cdot 3-4\\ x&=6-4\\ x&=2 \end{aligned}$$

5. Luego: $x=2,\ y=3$.

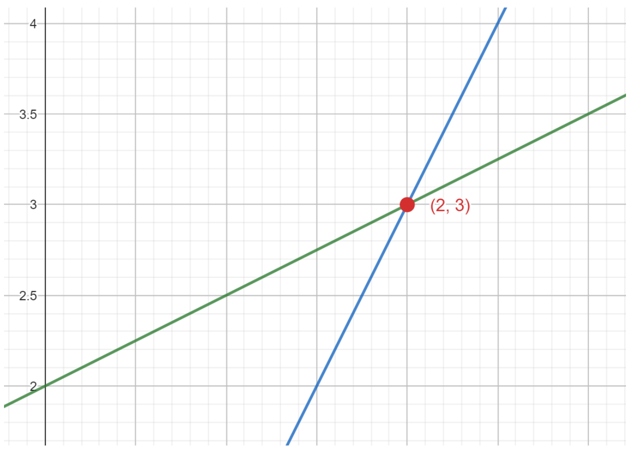

Figura 5.1: Representación gráfica del sistema de ecuaciones. Punto $(2,3)$ solución del sistema.

Ejercicio 5.1.2.

$$\left.\begin{array}{r} 2x = 12 + 2y \\ 3y - 2x = 5y \end{array}\right\}$$

Solución:

1. Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones.

$$x = \frac{12 + 2y}{2}$$
$$x = 6 + y$$

2. Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$$3y - 2(6 + y) = 5y$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$3y - 2(6 + y) = 5y$$
$$3y - 12 - 2y = 5y$$
$$y - 5y = 12$$
$$-4y = 12$$
$$y = \frac{12}{-4}$$
$$y = -3$$

4. Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada:

$$x = 6 + y$$
$$x = 6 - 3$$
$$x = 3$$

5. Por lo tanto: $x = 3, \; y = -3$.

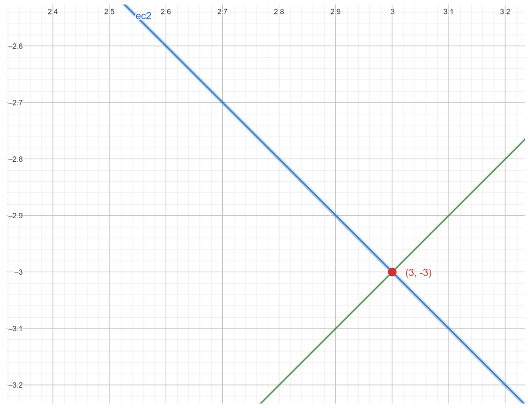

Figura 5.2: Representación gráfica del sistema de ecuaciones. Punto (3,-3) solución del sistema.

5.1.2. Método de igualación

Ejercicio 5.1.3.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ x + 2y = -1 \end{array}\right\}$$

Solución:

1. Despejamos, por ejemplo, la incógnita x de la primera y de la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ x + 2y = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x = 5 + y \\ x = -1 - 2y \end{array}$$

2. Igualamos las expresiones:

$$5 + y = -1 - 2y$$

3. Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 5 + y &= -1 - 2y \\ y + 2y &= -1 - 5 \\ 3y &= -6 \\ y &= \frac{-6}{3} \\ y &= -2 \end{aligned}$$

4. Sustituimos el valor de y, en cualquiera de las 2 ecuaciones:

$$x = 5 + y$$
$$x = 5 - 2$$
$$x = 3$$

5. Luego: $x = 3,\ y = -2$.

Ejercicio 5.1.4.

$$\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{3y-5}{2} \\ 2y + x = 15 \end{array}\right\}$$

Solución:

1. Despejamos, la incógnita x de la segunda ecuación, de la primera ya está despejada:

$$2y + x = 15$$
$$x = 15 - 2y$$

2. Igualamos las expresiones:

$$\frac{3y-5}{2} = 15 - 2y$$

3. Resolvemos la ecuación:

$$\frac{3y-5}{2} = 15 - 2y$$
$$3y - 5 = 2(15 - 2y)$$
$$3y - 5 = 30 - 4y$$
$$3y + 4y = 30 + 5$$
$$7y = 35$$
$$y = \frac{35}{7}$$
$$y = 5$$

4. Sustituimos el valor de y, en cualquiera de las 2 ecuaciones:

$$x = 15 - 2y$$
$$x = 15 - 2 \cdot 5$$
$$x = 15 - 10$$
$$x = 5$$

5. Por tanto: $x = 5, \ y = 5$.

5.2. Sistemas de ecuaciones lineales de dos o más incógnitas por el método de Gauss.

Ejercicio 5.2.1.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{array}\right\}$$

Solución:

1. Escribimos en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right)$$

2. Reemplazamos las filas $\{f_1, \ f_3\}$ por $\{f_1 - 2f_2, \ f_3 - 5f_2\}$ respectivamente y obtenemos la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

3. Reemplazamos la fila f_3 por $f_3 - 2f_1$ respectivamente y obtenemos la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ya está el sistema puesto en forma escalonada. Sabemos que el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos:
De la f_3: $13y = 0 \to y = 0$.
De la f_1: $-y + z = -2 \to 0 + z = -2 \to z = -2$.
De la f_2: $x - 2y + z = 3 \to x - 0 - 2 = 3 \to x = 3 + 2 \to x = 5$.

4. La solución del sistema es: $x = 5,\ y = 0,\ z = -2$.
   Ver representación 3D del sistema de ecuaciones y la solución en www.desmos.com/3d/354ea8c19f

Ejercicio 5.2.2.

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{array}\right\}$$

Solución:

1. Escribimos en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{array}\right)$$

2. Reemplazamos las filas $\{f_2,\ f_3\}$ por $\{f_2 - 5f_1,\ f_3 - f_1\}$ respectivamente y obtenemos la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{array}\right)$$

3. Eliminamos la fila f_2 al ser proporcional a la fila f_3 ($f_2 = 2f_3$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{array}\right)$$

Ya está el sistema puesto en forma escalonada. Sabemos que el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:
De la f_2: $7y - 17z = -21 \to y = \dfrac{-21 + 17z}{7} = -3 + \dfrac{17}{7}z$.
De la f_1: $x - 3y + 7z = 10 \to x = 10 + 3(-3 + \dfrac{17}{7}z) - 7z = 1 + \dfrac{2}{7}z$.

Cuando el sistema es compatible indeterminado, una de las incógnitas viene dada por un parámetro.

4. La solución del sistema es: $x = 1 + \frac{2}{7}\lambda,\ y = -3 + \frac{17}{7}\lambda,\ z = \lambda.$

   Ver la representación gráfica en 3D del sistema de ecuaciones en www.desmos.com/3d/48c7e30298.

Ejercicio 5.2.3.

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 7 \\ 2x - y + 15z &= 3 \\ x - 8y - 21z &= 11 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

1. Escribimos en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{array}\right)$$

2. Reemplazamos las filas $\{f_2,\ f_3\}$ por $\{f_2 - 2f_1,\ f_3 - f_1\}$ respectivamente y obtenemos la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & -5 & -19 & 4 \end{array}\right)$$

3. Reemplazamos la fila f_3 por $f_3 + f_2$ obtenemos la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & -5 & -19 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

   Tenemos una fila de ceros, menos el término independiente. Por lo que el sistema es incompatible. Puedes ver la representación gráfica en 3D del sitema de ecuaciones en www.desmos.com/3d/5604c42fae.