Sistemas polinomiales: introducción y aplicaciones

ALBERTO VIGNERON TENORIO
Dpto. de Matemáticas

Universidad de Cádiz

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Dentro del concepto *sistemas de ecuaciones polinomiales* vamos a englobar tres tipos de sistemas:

- Los sistemas lineales, que son aquellos formados por ecuaciones lineales.

- Los sistemas lineales con función objetivo, que que son aquellos formados por ecuaciones e inecuaciones lineales donde hay que maximizar o minimizar una determinada función objetivo que viene dada por una expresión lineal.

- Los sistemas polinomiales, que son aquellos formados por ecuaciones polinómicas no todas lineales.

La resolución de sistemas de estos tipos no son un tema trivial. Incluso en algunos casos no podemos llegar a saber las soluciones exactas debido a la gran complejidad que pueden llegar a alcanzar dichos sistemas.

En cualquier caso, son una herramienta imprescindible a la hora de abordar la resolución de problemas de la vida *cotidiana* dentro de muy diversos campos (ingeniería, biología, arquitectura, economía, telecomunicaciones, transportes, etc.).

En este resumen vamos a plantear tres ejemplos de problemas que se plantean y resuelven con los sistemas polinomiales.

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales: el análisis del umbral de rentabilidad

Un elemento eficaz que ayuda a la toma de decisiones en el ámbito empresarial, es el análisis del llamado *punto de cobertura, punto muerto o umbral de rentabilidad.* Éste representa el volumen de producción-venta, Q, que es necesario para que la empresa cubra la totalidad de sus costes fijos, CF, y costes variables, $CV(Q)$, es decir, es el volumen mínimo de actividad, a partir del cual se comienza a obtener beneficios.

Analíticamente, el punto de cobertura, Q_C, es aquel volumen de producción que iguala los ingresos totales, IT, a los costes totales, CT.

Los ingresos totales, $IT(Q)$, supuesto un precio de venta unitario del producto, p, y una producción, Q, vienen determinados por la expresión:

$$IT(Q) = p \cdot Q$$

El coste total, $CT(Q)$, es la suma de los costes fijos, CF, y los costes variables, $CV(Q)$. Estos últimos, como dependen del volumen de producción, los expresaremos como $CVMe \cdot Q$, siendo $CVMe$ el coste variable medio por unidad de producto fabricada. El coste total viene expresado por:

$$CT(Q) = CF + CVMe \cdot Q$$

Igualando ambas expresiones tenemos una ecuación lineal en la variable Q,

$$p \cdot Q = CF + CVMe \cdot Q$$

cuya resolución nos da el punto de cobertura, Q_C :

$$Q_C = \frac{CF}{(p - CVMe)}$$

A la diferencia entre el precio de venta y el coste variable medio, $p - CVMe$, se le denomina margen de cobertura o de contribución y se denota por m. Conceptualmente representa la aportación al beneficio que realiza cada unidad producida y vendida,

$$Q_C = \frac{CF}{m}$$

Basta multiplicar el punto de cobertura, Q_C, por el precio de venta, p, para expresarlo en unidades monetarias.

Podemos comparar la cantidad que fabrica nuestra empresa, Q_0, con el punto de cobertura, Q_C, para determinar si nos interesa comprar o fabricar los componentes, siempre y cuando $p > CVMe$, porque de lo contrario, carecería de significado económico:

- Si $Q_0 > Q_C$, la empresa obtiene beneficios.
- Si $Q_0 < Q_C$, la empresa obtiene pérdidas.
- Si $Q_0 = Q_C$, la empresa no obtiene ni beneficios, ni pérdidas.

Este mismo problema se puede plantear considerando que nuestra empresa tiene más de una unidad de producción. En ese caso, tenemos que estudiar un sistema de ecuaciones.

Supongamos que tenemos que producir n productos con precios de venta p_i, con coste variable $CVMe_i$ y una producción Q_i. Los costes totales del $i-$ésimo producto sería $CT_i(Q_i)$, sus ingresos totales $IT_i(Q_i)$, y sus costes fijos CF_i. Para calcular ahora el punto de cobertura, tendremos que plantear la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} CT_i(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} IT_i(Q_i),$$

y las $2n$ ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} CT_i(Q_i) & = & CF_i + CVMe_i \cdot Q_i \\ IT_i(Q_i) & = & p_i \cdot Q_i \end{array}\right.$$

Entre todas las soluciones posibles de este sistema de ecuaciones existirán algunas sin sentido económico ya que darán cantidades negativas para la producción, precios, etc. Un planteamiento sencillo utilizado para evitar usar técnicas matemáticas más *complejas* consiste en introducir una nueva hipótesis: los costes e ingresos totales de cada uno de los productos coinciden, $IT_i(Q_i) = CT_i(Q_i)$. Con esta nueva hipótesis podemos resolver, a costa de reducir la casuística de nuestro estudio, el sistema anterior con cada uno de los bienes por separado.

Capítulo 3

Sistemas lineales con función objetivo: el problema del transporte

El Problema del Transporte en su versión básica es el siguiente:

Consideremos $T_1, \ldots, T_m$, m fábricas que producen una cierta cantidad C de unidades de un producto, y consideremos también $S_1, \ldots, S_n$, n establecimientos que demandan C unidades de dicho producto.

Cada fábrica T_i produce una cantidad a_i del producto y cada establecimiento S_j demanda b_j unidades del producto, como la oferta coincide con la demanda, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = C.$$

El problema surge cuando tenemos que distribuir nuestra producción entre los distintos establecimientos. Suponiendo que transportar, de la $i-$sima fábrica T_i al $j-$ésimo establecimiento S_j, una unidad del producto nos cuesta c_{ij} euros, la pregunta que nos hacemos es: *¿cómo distribuimos la mercancía de manera que el coste en transporte sea el mínimo?*

Matemáticamente el problema es: si denotamos por x_{ij} a las unidades del producto que llevaremos de T_i a S_j,

Minimizar la función:

$$c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

Sujeto a las condiciones:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_{11} + \cdots + x_{1n} & & & & & = & a_1 \\
& & x_{21} + \cdots + x_{2n} & & & = & a_2 \\
& & & \ddots & & & \vdots \\
& & & & x_{m1} + \cdots + x_{mn} & = & a_m \\
x_{11} + \cdots + x_{m1} & & & & & = & b_1 \\
& & x_{12} + \cdots + x_{m2} & & & = & b_2 \\
& & & \ddots & & & \vdots \\
& & & & x_{1n} + \cdots + x_{mn} & = & b_n \\
x_{11}, \cdots, x_{1n}, & \cdots & x_{21}, \cdots, x_{2n}, & \cdots & x_{m1}, \cdots, x_{mn} & \geq & 0
\end{array}$$

es decir, resolver un sistema lineal de ecuaciones con una función objetivo lineal.

Capítulo 4

Sistemas polinomiales: el dilema del prisionero

Como ejemplo de la utilidad de este tipo de sistemas, vamos a abordar el equilibrio de Nash de un juego no cooperativo y de suma no nula, es decir, un juego en el cual la ganancia de un jugador no implica la pérdida de otro y ambos jugadores tienen que fijar su estrategia sin conocer la de su oponente. El desarrollo lo haremos sobre un conocido juego: el dilema del prisionero.

Éste puede ser enunciado de la siguiente forma: consideremos que se ha detenido a dos presuntos ladrones que *trabajaban* juntos. La justicia sólo tiene pruebas para encerrarlos acusados de una falta menor por un periodo de un año a cada uno, pero sospecha que sus delitos podrían ser mayores y por ello idea una forma de conseguir una confesión. El fiscal se reúne por separado con los reos, y les plantea, a cada uno, las siguientes posibilidades:

- Con las pruebas actuales de las que disponemos podemos encarcelaros a los dos por un periodo de un año, pero si confiesas las demás fechorías cometidas, te impondremos una condena de cinco meses, mientras que tu socio pagará vuestros pecados y será condenado a veinte años de prisión.
- Ahora bien, si confesáis ambos seréis condenados a 10 años de cárcel.

Por supuesto, si ambos reos pudieran comunicarse estaría claro que estrategia elegirían, pero eso no es posible (el juego es no cooperativo). En este caso, la mayor ganancia para ambos sería actuar de manera altruista.

A continuación modelizaremos, mediante el uso de ecuaciones polinómicas, los posibles comportamientos de los reos. Vamos a comenzar permitiendo la asignación de probabilidades a las posibles elecciones, para ello vamos a denotar en primer lugar por c_1 y t_1 las probabilidades de que el primer y segundo reo (respectivamente) confiesen, y por c_2 y t_2 las probabilidades de que permanezcan en silencio. Al vector (c_1, c_2) lo denotaremos mediante $\mathbf{c}$ y a (t_1, t_2) mediante $\mathbf{t}$. Al ser probabilidades tenemos que

$$\begin{cases} c_i, t_i \geq 0 & i = 1, 2 \\ c_1 + c_2 & = \quad 1 \\ t_1 + t_2 & = \quad 1 \end{cases}$$

Esta suposición permite que las condenas de nuestros reos puedan ser fracciones de las condenas propuestas por el fiscal.

Denotaremos por P y Q a las matrices de ganancias (en nuestro caso años de condena) de nuestros jugadores. La matriz P tiene en la posición $(1, 1)$ la cantidad de años de condena del primer reo si ambos confesasen, en la posición $(1, 2)$ los años de condena si él confiesa y su cómplice no, en la posición $(2, 1)$ los años si él no confiesa y su cómplice si, y por último, en la posición $(2, 2)$ los años de condena para la posibilidad que nos queda, es decir, ninguno confiesa. De manera análoga se construye la matriz Q para el segundo reo. Con el planteamiento de nuestro dilema, $Q = P^t$.

Con las definiciones anteriores es fácil apreciar que el tiempo que pasará el primer reo en prisión se corresponderá con la forma bilineal

$$\alpha = \mathbf{c}P\mathbf{t} = \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij} c_i t_j$$

y el del segundo detenido con

$$\beta = \mathbf{c}Q\mathbf{t} = \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij} c_i t_j.$$

Las probabilidades (y por lo tanto estrategias) que determinarán posibles equilibrios de Nash serán aquellas en las cuales, si un reo cambia su opción de manera unilateral, no obtenga una mejora en su condena, pudiendo incluso empeorar sus condiciones. Esto se traduce en la siguiente condición: para cualquier par de números positivos y de suma uno d_1 y d_2, es decir, otra estrategia distinta de la elegida, tenemos que

$$\begin{cases} \mathbf{c}P\mathbf{t} & = & \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij}c_it_j & \leq & \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij}d_it_j & = & \mathbf{d}P\mathbf{t} \\ \mathbf{c}Q\mathbf{t} & = & \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij}c_it_j & \leq & \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij}c_id_j & = & \mathbf{c}Q\mathbf{d} \end{cases}$$

En particular, esto también ocurrirá para $(d_1, d_2) = (1, 0)$ y $(d_1, d_2) = (0, 1)$,

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij}c_it_j & \leq & \sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j \\ \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij}c_it_j & \leq & \sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j \\ \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij}c_it_j & \leq & \sum_{i=1}^{2} Q_{i1}c_i \\ \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij}c_it_j & \leq & \sum_{i=1}^{2} Q_{i2}c_i \end{cases}$$

Realizando una reescritura de las ecuaciones anteriores tenemos que

$$\alpha = c_1 \sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j + c_2 \sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j$$

con α menor o igual que $\sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j$ y que $\sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j$, y de forma análoga

$$\beta = t_1 \sum_{i=1}^{2} Q_{i1}c_i + t_2 \sum_{i=1}^{2} Q_{i2}c_i$$

con β menor o igual que $\sum_{i=1}^{2} Q_{i1}c_i$ y que $\sum_{i=1}^{2} Q_{i2}c_i$.

Partíamos de $c_1 + c_2 = 1$, lo cual implica

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2)\alpha &= \alpha \\ &= c_1 \textstyle\sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j + c_2 \sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$c_1 \left(\sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j - \alpha \right) + c_2 \left(\sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j - \alpha \right) = 0.$$

Como ambos sumandos son positivos, tenemos que

$$c_1\left(\sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j - \alpha\right) = c_2\left(\sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j - \alpha\right) = 0. \tag{4.1}$$

De forma equivalente llegamos al polinomio

$$t_1\left(\sum_{i=1}^{2} Q_{i1}c_i - \beta\right) = t_2\left(\sum_{i=1}^{2} Q_{i2}c_i - \beta\right) = 0. \tag{4.2}$$

El desarrollo anterior lleva de forma natural a la siguiente proposición.

Proposición 4.1. *Los vectores* $(c_1, c_2, t_1, t_2, \alpha, \beta)$ *que verifican las ecuaciones* (4.1) *y* (4.2)*, y hacen no negativos cada uno de los factores que aparecen, son los puntos de equilibrio de Nash de nuestro juego.*

Ejemplo 4.2. *Apliquemos este resultado al dilema del prisionero que propusimos. Las matrices P y Q de cada prisionero son*

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 5\ meses \\ 20 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5\ meses & 1 \end{pmatrix}$$

Para simplificar la notación, vamos a imponer a las probabilidades que sumen uno, es decir, vamos a tomar $c_1 = c$ y $c_2 = 1 - c$, y $t_1 = t$ y $t_2 = 1 - t$. Con esto las ecuaciones (4.1) *y* (4.2)*, quedarían como sigue:*

$$\begin{cases} c(10t + 5/12(1-t) - \alpha) & = & (1-c)(20t + (1-t) - \alpha) & = & 0 \\ t(10c + 5/12(1-c) - \beta) & = & (1-t)(20c + (1-c) - \beta) & = & 0 \end{cases}$$

La resolución de estas ecuaciones nos da un único resultado que hace que los factores sean no negativos,

$$c = 1,\ t = 1,\ \alpha = 10,\ \ y\ \beta = 10.$$

Éste es el punto de equilibrio de Nash, ya que, independientemente de la elección del otro reo, confesar es la única manera de evitar la larga condena de 20 años.

El dilema del prisionero admite enunciados relacionados más directamente con la economía y los movimientos empresariales y de mercados. Por ejemplo, podemos resolver mediante esta técnica problemas relacionados con duopolios, oligopolios, problemas de decisión de estrategias empresariales... (ver [1] y [2]).

Bibliografía

[1] LAIDLER, D. y ESTRIN, S. *Introducción a la microeconomía.* Antoni Bosch, 1993.

[2] SAMUELSON P.A. y NORDHAUS, W.D. *Economía.* McGraw-Hill, 2002.

[3] STURMFELS, B. *Solving Systems of Polinomial Equations.* Por aparecer. Hasta su publicación estara disponible en la dirección `http://math.berkeley.edu/ bernd/cbms.html`.