Sistemas de ecuaciones lineales

ALBERTO VIGNERON TENORIO
Dpto. de Matemáticas

Universidad de Cádiz

Índice general

Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales. Definiciones

Definición 1.1.1 *Llamaremos sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre $\mathbb{R}$ a toda expresión del tipo:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1.1}$$

donde $a_{ij}, b_i \in k$. Llamaremos solución del sistema a cualquier $n-$upla $(x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de $\mathbb{R}$ que verifique todas las ecuaciones.

La notación matricial usual de un sistema de ecuaciones lineales es

$$Ax = b,$$

donde:

- $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *se llama matriz de coeficientes del sistema.*
- $b = (b_i) \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ *se llama matriz del término independiente*
- $x = (x_i) \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *matriz de incógnitas.*

Diremos que el sistema es homogéneo si el término independiente es nulo y no homogéneo en caso contrario.

Diremos que el sistema es compatible si tiene alguna solución, e incompatible en caso contrario. Si el sistema es compatible, diremos que es determinado si posee una única solución, e indeterminado en caso contrario.

Diremos que dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

1.2. Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 1.2.1 *(de Rouché-Frobenius).- Sea $Ax = b$ el sistema* (1.1)*, entonces es compatible si y sólo si $rang(A) = rang(A|b)$*[1]*. Además, si el sistema es compatible,*

- *$rang(A) = n \Rightarrow$ compatible determinado.*
- *$rang(A) < n \Rightarrow$ compatible indeterminado.*

Corolario 1.2.2 *Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales es compatible.*

El anterior teorema nos permite, mediante una sencilla comprobación, averiguar el carácter de un sistema de ecuaciones. A continuación veremos dos métodos que nos permitirán resolver dichos sistemas.

[1] A esta matriz se le llama matriz ampliada del sistema.

Capítulo 2

Resolución de sistemas de ecuaciones

2.1. Método de eliminación de Gauss-Jordan

Sea el sistema compatible $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Consideremos la matriz del sistema $(A|b)$.

El método de Gauss-Jordan consiste en transformar, mediante transformaciones elementales por filas, la matriz $(A|b)$ en otra equivalente $(A'|b')$, con A' triangular inferior. Nótese que resolver el nuevo sistema, equivalente al primero, es sumamente sencillo.

Las transformaciones elementales por fila sobre una matriz son:

- intercambiar dos filas entre si.
- multiplicar una fila por un número no nulo.
- sumar a una fila un múltiplo de otra.

2.2. Método de Cramer

Teorema 2.2.1 *(Método de Cramer)*[1] *.- Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $det(A) \neq 0$. Entonces, la única solución del sistema $Ax = b$, con $b = (b_i) \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, viene dada por:*

$$x_i = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \forall i = 1, \ldots, n.$$

[1] También es conocido por regla de Cramer.

Capítulo 3

Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales en las indeterminadas $x_1, \ldots, x_4$,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

En primer lugar, vamos a aplicar el teorema de Rouché-Frobenius para estudiar la compatibilidad del sistema de ecuaciones. En este caso, tenemos que el rango de la matriz de coeficientes del sistema, que vamos a denotar por A, tiene la siguiente relación el rango de la matriz ampliada, que denotaremos por $(A|b)$:

$$rang(A) = rang(A|b) = 3 < 4 = \text{ n}^{\underline{o}} \text{ de incógnitas del sistema.}$$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Resolvamos ahora dicho sistema utilizando los dos métodos expuestos anteriormente.

- *Método de Gauss-Jordan.*- Mediante transformaciones elementales por filas de la matriz del sistema anterior, encontramos una matriz equivalente a la primera (y por lo tanto un sistema de ecuaciones equivalente),

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6/5 & \frac{18}{5} & -9/5 \end{array}\right)$$

  A aquellas variables que no forman parte de un menor de orden máximo, en nuestro caso hemos tomado x_4, de la matriz de coeficientes del sistema las renombramos dándole el valor de un parámetro, $x_4 = \lambda$, y las *pasamos* al término independiente de cada ecuación,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -1-3\lambda \\ 0 & -5 & 4 & -1+3\lambda \\ 0 & 0 & 6/5 & -9/5-\frac{18}{5}\lambda \end{array}\right)$$

Este nuevo sistema, equivalente al primero, tiene una resolución *inmediata.* De la última ecuación obtenemos $x_3 = -3/2 - 3\lambda$, de la segunda, tras sustituir el valor anterior, despejamos x_2, etc. Al final de este proceso tenemos:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -5/2-3\lambda \\ x_2 & = & -1-3\lambda \\ x_3 & = & -3/2-3\lambda \\ x_4 & = & \lambda \end{array}\right.$$

- *Método de Cramer.*- El método de Cramer nos obliga a que la matriz de coeficientes del sistema que estemos considerando tenga determinante distinto de cero. En nuestro caso la matriz ni siquiera es cuadrada. Para resolver este sistema mediante el método de Cramer hay que realizar algunos cambios preliminares.

  En primer lugar hay que reescribir el sistema para que la matriz de coeficientes del mismo sea cuadrada y tenga determinante no nulo. Para ello, fijada una submatriz de la matriz de coeficientes de rango máximo, renombramos, y escribimos como parámetros, las variables que no estén en dicha submatriz, y las *pasamos* al término independiente. En nuestro caso vamos a realizar esta operación sobre x_4, $x_4 = \lambda$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -1-3\lambda \\ 2 & 1 & -2 & -3-3\lambda \\ 0 & -1 & 2 & -2-3\lambda \end{array}\right)$$

  Ahora nos encontramos en las condiciones que necesita la regla de

Cramer, y por lo tanto,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} -1-3\lambda & 3 & -3 \\ -3-3\lambda & 1 & -2 \\ -2-3\lambda & -1 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{15+18\lambda}{-6} \\ x_2 & = & \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 1 & -1-3\lambda & -3 \\ 2 & -3-3\lambda & -2 \\ 0 & -2-3\lambda & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{6+18\lambda}{-6} \\ x_3 & = & \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1-3\lambda \\ 2 & 1 & -3-3\lambda \\ 0 & -1 & -2-3\lambda \end{vmatrix} = \dfrac{9+18\lambda}{-6} \\ x_4 & = & \lambda \end{array}\right.$$

Bibliografía

[1] Vigneron-Tenorio, A. Matemáticas básicas para la economía y la empresa. Textos básicos universitarios, **34**. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz (2004).

Índice alfabético