Programación lineal: definiciones elementales

ALBERTO VIGNERON TENORIO
Dpto. de Matemáticas

Universidad de Cádiz

Programación Lineal

La resolución óptima de problemas constituye una parte importante de la formación de un científico o técnico. Dentro de las Matemáticas este problema se enmarca en la *Programación Matemática.*

Los problemas de programación lineal admiten, para un máximo de 3 variables, una fácil interpretación gráfica.

Un problema de programación lineal es un problema de minimizar o maximizar una función lineal sujeta a restricciones lineales del tipo desigualdad, igualdad o ambas. Consideremos ahora el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar:

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
 & \vdots & \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & \geq & b_m \\
x_1, x_2, \cdots x_n, & \geq & 0
\end{array}$$

A la función $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ se le llama *función objetivo*, los coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ los denotaremos *coeficientes de costo.* A los valores de $x_1, \ldots, x_n$ que verifican las restricciones los llamaremos *puntos factibles* y a la región que determinan *región factible.*

El problema de programación lineal se enuncia como sigue: *encontrar entre todos los puntos factibles uno que minimiza la función objetivo.*

Nótese que en el problema puede sustituirse fácilmente la minimización por maximización, y del mismo modo las restriciones dadas por las inecuaciones $\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$ pueden convertirse en igualdades añadiendo nuevas variables de manera que

$$\sum_j a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i \text{ y } x_{n+1} \geq 0.$$

Con las notaciones anteriores, el problema de programación lineal puede ser reescrito con notación matricial de la siguiente manera:
sean

$$\begin{array}{l} c = (c_1, \ldots, c_n) \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \\ b = (b_1, \ldots, b_n) \end{array} \ , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que

Minimizar: cx

Sujeto a: $Ax \geq b$ (ó $Ax = b$) y $x \geq 0$.

Un algoritmo clásico para la resolución de este tipo de problemas es el llamado *método Simplex* que, dada su elevada complejidad técnica, lo abordaremos en este curso sólo a nivel de cálculo.

Bibliografía

[1] BAZARAA, M. S., JARVIS, J.J. Linear programing and network flows. Jonh Wiley and sons, 1977.

[2] BUENO CAMPOS, E., CRUZ ROCHE, I., DURÁN HERRERA Economía de la empresa. Pirámide, 1983.

[3] CHANG, Y.L., SULLIVAN, R.S. Quantitative Systems for Business Plus, version 2.1. Prentice Hall, Inc., 1996.

[4] CHIANG, A.C. Métodos fundamentales de economía matemática. McGraw-Hill, 1987

[5] HILLIER, F.S., LIEBERMAN, G.J. Introducción a la investigación de operaciones. McGraw-Hill, 1989.

[6] WIKIPEDIA. Wikipedia. La enciclopedia libre. http://es.wikipedia.org/wiki/Programacion_lineal.